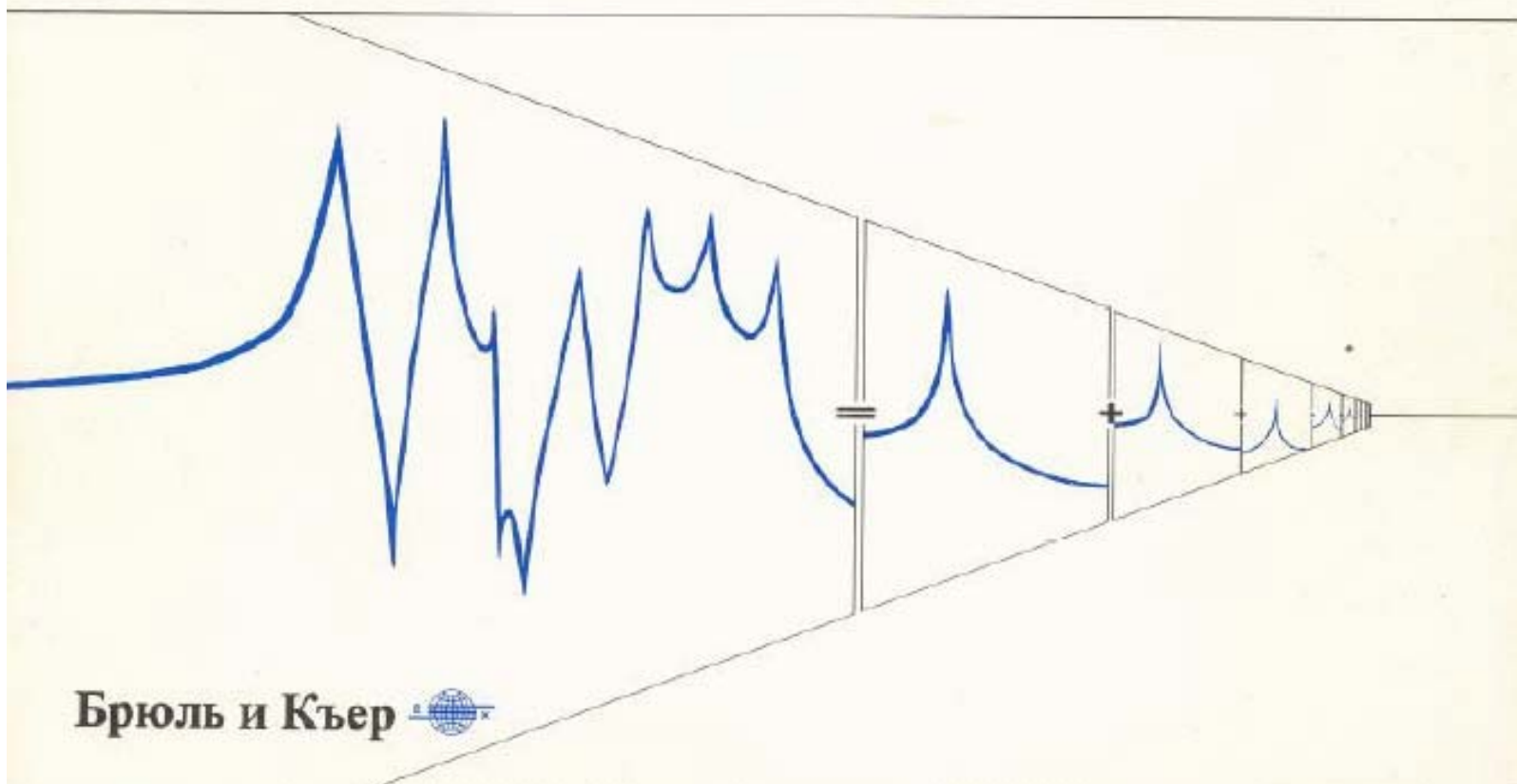


Испытания конструкций

Часть 2. Анализ мод колебаний и моделирование



Брюль и Кьер 

Испытания конструкций

Часть 2. Анализ мод колебаний и моделирование

Оле Дэссинг, Брюль и Кьер

Предисловие к части	2	Что такое подбор кривой	37
Экспериментальный анализ мод колебаний	3	Средства подбора кривых при анализе мод колебаний	39
Все конструкции проявляют модальные свойства	4	Локальные и глобальные средства подбора кривых	42
Модели систем с одной степенью свободы	7	Модальные испытания, проводимые с помощью ЭВМ	43
Модели систем с одной степенью свободы в частотной области	9	Этап 1 — подготовка модальных испытаний	44
Координата полюса и вычет	12	Этап 2 — проведение измерений	47
Степени свободы и модели систем с несколькими степенями свободы	14	Этап 3 — оценка параметров путем подбора кривых	48
Что такое форма мод?	16	Этап 4 — выпуск документации по испытаниям и их результатам	49
Нормальные моды и комплексные моды	18	Динамическая модальная модель	51
Связь вычетов и форм мод	19	Проверка и применение модели	53
Масштабирование форм мод	20	Замечание о законченности модели	54
Модальная связь	22	Что такое имитационное моделирование с помощью ЭВМ	56
Предположения модального описания	23	Имитационное моделирование реакций	58
Практические конструкции	24	Имитация модификаций	60
Модель с сосредоточенными параметрами и модальная теория	25	Внесение модификаций	62
Модальное пространство	27	Проведение модификаций	63
Характеристика степеней свободы	28	Пример применения синтезированных ЧХ	65
Степени свободы и матрица подвижности	30	Дополнительная литература	67
Модальные испытания простой конструкции	32	Обозначения и пояснения	68
Определение форм мод методом квадратур	34		
Оценка параметров с помощью подбора кривых	36		

Предисловие к части 2

Изучение динамики конструкций имеет большое значение для понимания и оценки эксплуатационных характеристик любого изделия технического характера. Имеем ли мы дело с печатными платами или подвесными мостами, высокоскоростными печатающими устройствами или стартовыми установками ракет - хорошие динамические характеристики представляют собой основу непрерывной и удовлетворительной эксплуатации.

Анализ мод колебаний на основе данных, полученных в результате испытаний, обеспечивает получение определенного описания реакции конструкции, которая может быть оценена в сравнении с проектной спецификацией. Он также позволяет получить мощный инструмент, модальную модель, которая позволяет определить влияние конструктивных модификаций или предсказать поведение конструкции при изменяющихся рабочих условиях.

Упрощенное определение анализа мод колебаний может быть сделано путем сравнения его с частотным анализом. При частотном анализе сложный сигнал разлагается в набор простых синусоидальных волн с индивидуальными частотными и амплитудными параметрами. При анализе мод колебаний сложная динамическая деформация совершающей механические колебания конструкции разлагается в набор простых мод с индивидуальными частотными параметрами и параметрами затухания.

Строгие математические выкладки по данному предмету выходят за рамки данной брошюры. При необходимости лишь приводятся математические определения для подтверждения интуитивных предположений. Для читателей, желающих найти подтверждение справедливости приводимых математических соотношений, в конце брошюры приведен перечень соответствующей литературы.

К вопросу о подготовленности читателя (см. предисловие к части 1) мы добавим также предположение знакомства с частью 1, названной *«Измерения механической подвижности»*.

Экспериментальный анализ мод колебаний

Введение

Большинство конструкций совершают механические колебания. При эксплуатации все машины, транспортные средства и здания подвергаются воздействию динамических сил, которые приводят к возникновению механических колебаний. Очень часто необходимо провести исследование механических колебаний вследствие возникших проблем или вследствие необходимости подгонки характеристик конструкции под «стандартные» или контрольные значения. Независимо от причин, необходимо получить каким-либо образом количественные данные о реакции конструкции для того, чтобы можно было оценить ее влияние на эксплуатационные характеристики и усталость материалов.

Измерения и частотный анализ механических колебаний работающей конструкции могут быть выполнены с использованием методов анализа сигналов. После этого может быть проведена проверка соответствия *частотного спектра* механических колебаний заданным параметрам. Результат будет представлять произведение реакции конструкции и спектра неизвестной силы возбуждения. Он будет давать мало или не давать вообще информации о характеристиках самой конструкции.

Другим подходом является метод анализа систем, при котором для измерения отношения реакции к измеряемой силе возбуждения может быть использован двухканальный анализатор, выполняющий быстрое преобразование Фурье. Определенные *частотные характеристики* способствуют выделению спектров силы из результатов и описанию собственно свойств конструкции между точками замера. По набору замеренных в различных точках конструкции частотных характеристик можно начать строить картину ее динамического поведения. Используемый при этом метод называется анализом мод колебаний.

Все конструкции проявляют модальные свойства

Определяемые экспериментальным путем частотные характеристики механических конструкций указывают на присутствие серий пиков. Отдельные пики часто очень острые и четко определенные при дискретных частотах, что указывает на резонансы, каждый из которых представляет собой характеристику системы с одной степенью свободы. Если в результате определения частотных характеристик с повышенным разрешением по частоте выявляются новые пики, то можно предполагать присутствие нескольких резонансов. Вследствие этого конструкция представляет собой как бы набор отдельных механических систем с одной степенью свободы. Это является основой анализа мод колебаний, с помощью которого может быть проведен анализ поведения конструкции путем определения и оценки всех резонансных частот или мод, имеющихся в характеристиках конструкции.

Рассмотрим сначала вопрос о том, как реакция конструкции может быть представлена в различных областях. Таким образом мы сможем увидеть, как модальное описание связано с описанием в пространственной, временной и частотной областях.

В качестве примера рассмотрим реакцию колокола, который представляет собой механическую систему с малым затуханием. При ударе по колоколу он выдает акустическую реакцию, содержащую ограниченное число чистых тонов. Реакция, соответствующая механическим колебаниям, имеет точно такую же структуру, а колокол как бы накапливает энергию удара и рассеивает ее в виде механических колебаний с несколькими дискретными частотами.

На рисунке в отдельных колонках показаны реакции колокола, представленные в различных областях:

В физической области сложная геометрическая деформация колокола может быть представлена с помощью набора простых независимых графиков деформации или форм мод.

Во временной области реакция в виде механических (или акустических) колебаний является временной функцией, которая может быть представлена как набор затухающих синусоид.

В частотной области анализ временного сигнала дает спектр, содержащий серию пиков, соответствующих спектрам реакций систем с одной степенью свободы.

В модальной области реакция колокола представлена в виде модальной модели, построенной на основе набора моделей систем с одной степенью свободы. Так как форма моды представляет собой перемещение *всех точек* конструкции при соответствующей модальной частоте, то одиночная модальная координата q может быть использована для представления всего вклада этой моды в общую деформацию конструкции в целом.

Возвращаясь назад по строкам рисунка, мы видим, что каждая модель системы с одной степенью свободы связана с *частотой, затуханием и формой моды колебаний*. Таким образом, имеются следующие МОДАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:

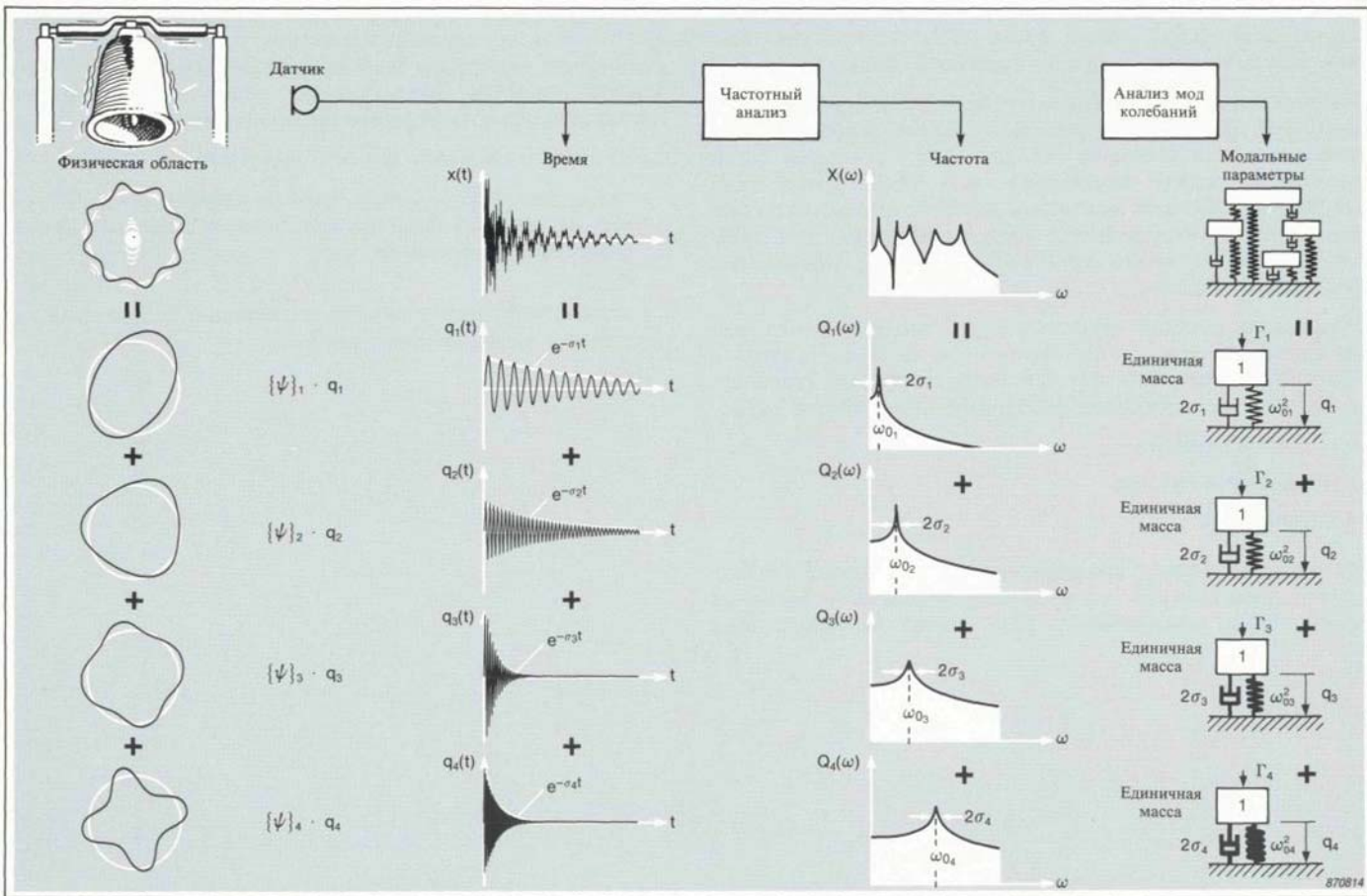
- модальная частота
- модальное затухание
- форма моды.

Эти параметры совместно образуют полное описание собственных динамических характеристик колокола и являются неизменными, независимо от того, звонит ли колокол или нет.

Анализ мод колебаний представляет собой процесс определения модальных параметров конструкции для всех мод в определенном частотном диапазоне. Основной целью его проведения является использование этих параметров для построения *модальной модели* реакции конструкции.

Заслуживают внимания два обстоятельства:

- любая вынужденная динамическая деформация конструкции может быть представлена в виде взвешенной суммы форм мод ее колебаний и
- каждая мода может быть представлена в виде модели системы с одной степенью свободы.



Модели систем с одной степенью свободы

Так как каждый пик (или мода) характеристики конструкции может быть представлен при помощи модели системы с одной степенью свободы, мы рассмотрим некоторые аспекты динамики систем с одной степенью свободы. В частности, мы исследуем методы построения моделей системы с одной степенью свободы в физической, временной и частотной областях. Эти модели не предназначены для представления физических конструкций, но они служат в качестве инструмента для интерпретации их динамического поведения (представленного с помощью набора предположений и граничных условий). Модели оказываются полезными для:

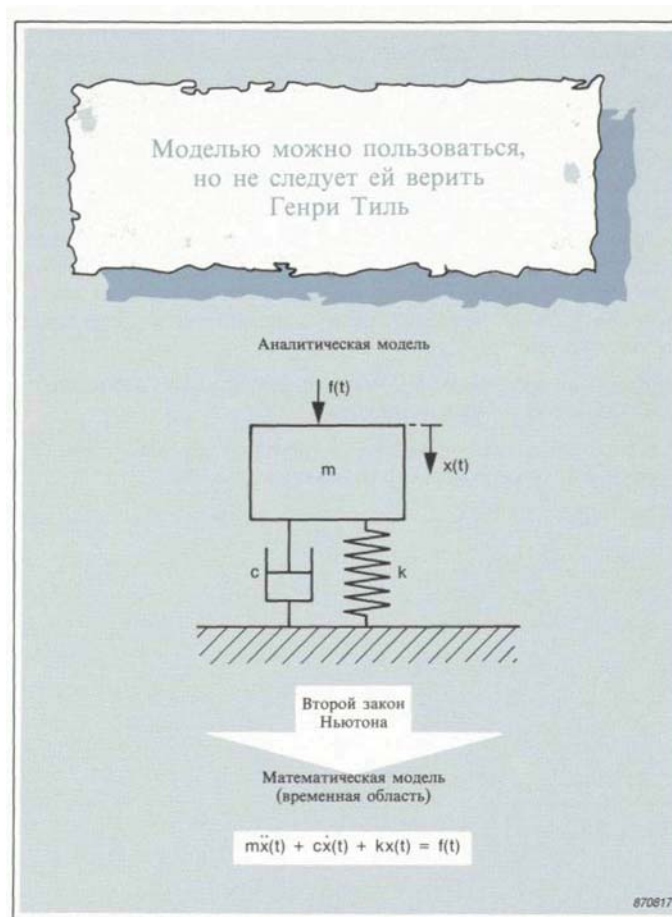
- понимания и интерпретации динамического поведения конструкции
- описания динамических свойств конструкции с помощью небольшого набора параметров
- определения динамических параметров на основе экспериментальных результатов (подбор кривой).

- **Аналитическая модель** может быть построена в физической области. Она представляет собой абстрактную систему, состоящую из *точечной массы (m)*, опирающуюся на *безынерционную линейную пружину (k)* и связанную с *вязкостным демпфером (c)*. Масса установлена таким образом, что она может перемещаться только в одном направлении (x), т.е. система имеет *одну степень свободы*.

• **Математическая** модель во временной области может быть получена путем приложения второго закона Ньютона к аналитической модели. Приравнявая внутренние силы (инерции, затухания и упругости) и внешние силы (возбуждения), мы получим следующую модель:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Эта модель представлена в виде дифференциального уравнения второго порядка. Более простая в математическом отношении модель может быть получена в частотной области.



Модели систем с одной степенью свободы в частотной области

- **Модель с пространственными параметрами** может быть построена в частотной области для описания частотной характеристики $H(\omega)$ в терминах массы, жесткости и коэффициента затухания.

Давайте рассмотрим поведение этой модели под воздействием синусоидального возбуждения и проследим за изменениями модуля $|H(\omega)|$ и фазы $\angle H(\omega)$ при изменении частоты.

Статическое смещение определяется только жесткостью пружины. При низких частотах реакция, определяемая в основном пружиной, находится в фазе с силой возбуждения.

При увеличении частоты присущая массе сила инерции оказывает возрастающее влияние. При определенной частоте ($\omega_0 = \sqrt{k/m}$ - *собственная частота незатухающих колебаний*) соответствующие массе и пружине составляющие взаимно аннулируются и реакция определяется только присущей демпферу составляющей. Следовательно, податливость системы увеличивается. Если присущая демпферу составляющая была бы равна нулю, то податливость стала бы бесконечной. При частоте ω_0 реакция отстает от силы возбуждения на 90° .

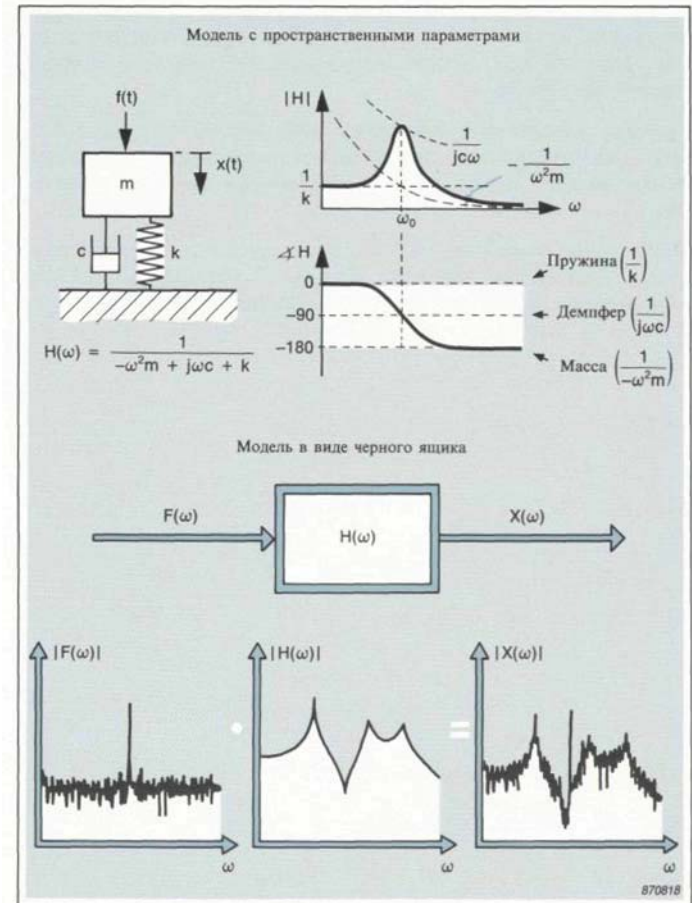
При частотах, превышающих ω_0 основное влияние оказывает присущая массе составляющая и система начинает вести себя как чистая масса, податливость уменьшается, а реакция отстает от силы возбуждения на 180° .

• **Модель частотной характеристики (модель в виде «черного ящика»)** является безпараметрической. Она основана на определяющем $H(\omega)$ выражении, т.е.

$$X(\omega) = H(\omega) \cdot F(\omega)$$

Функция $H(\omega)$ является частотной характеристикой податливости (перемещение/сила). Она представляет собой отношение выходного и входного спектров и изменяется в зависимости от частоты (ω).

Эта модель связывает аналитическую модель системы с одной степенью свободы с практическими измерениями и их результатами.



Модель с пространственными параметрами является идеальной для работы с аналитическими системами. Обычно нам неизвестны распределения массы, жесткости и затухания реальных конструкций. Следующая модель представляет собой практическую связь между теорией и практикой.

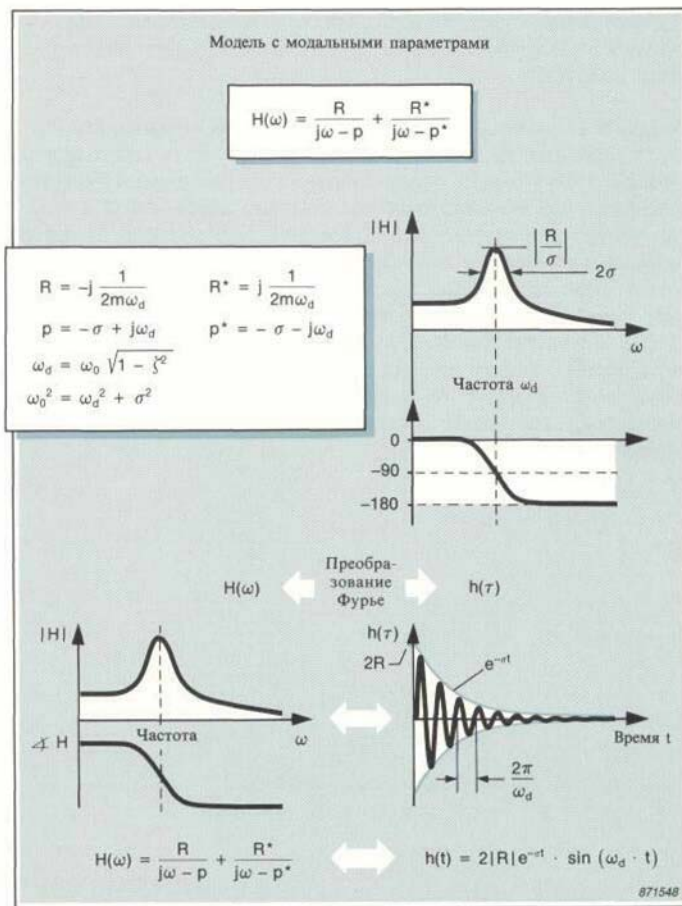
• **Модель** с модальными параметрами показана на рисунке. Она построена с помощью двух параметров, которые могут быть получены по результатам измерения частотных характеристик.

На данном рисунке функция $H(\omega)$ определяется *координатой полюса* (p) и *вычетом* (R) и их комплексно сопряженными величинами (p^* и R^*). Координата полюса и вычет в свою очередь определяются через пространственные параметры.

Координата полюса представляет собой комплексную величину. Численное значение ее действительной части (σ) представляет собой скорость затухания колебаний. Это показано на графике зависимости импульсной характеристики от времени. В частотной области σ представляет собой половину ширины полосы (-3 дБ) пика частотной характеристики. Мнимая часть координаты полюса представляет собой модальную частоту - *собственную частоту свободно затухающих колебаний* (ω_d).

Вычет в случае системы с одной степенью свободы представляет собой мнимую величину, которая отображает интенсивность моды колебаний.

Как показано на рисунке, координата полюса и вычет могут быть экспериментальным путем на основе измеренной и изображаемой на экране анализатора частотной характеристики. Таким образом, модель с модальными параметрами дает связь аналитических моделей с результатами экспериментальных исследований.



Координата полюса и вычет

Так как координата полюса и вычет представляют основу анализа мод колебаний, мы рассмотрим эти два параметра более подробно.

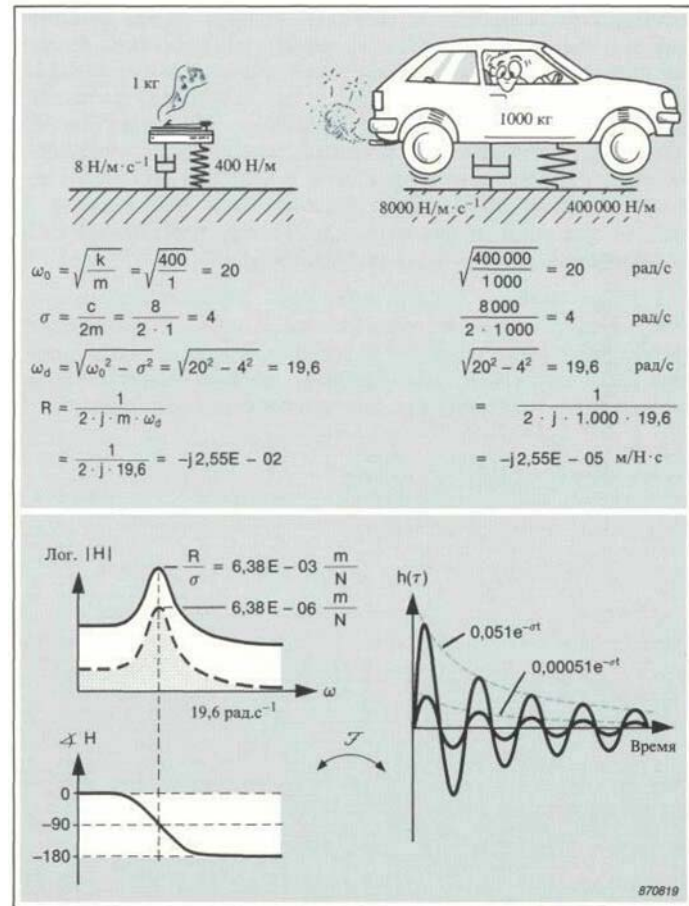
Координата полюса включает в себя два модальных параметра, описанных на стр. 4. Действительная часть координаты полюса представляет собой скорость затухания свободных колебаний (по отношению к модальному затуханию), а мнимая часть представляет собой частоту, при которой система совершает свободные затухающие колебания (модальная частота). Эта информация представлена в частотной области в виде средней частоты и половины ширины полосы (при -3 дБ) соответствующего резонансу пика. Координата полюса описывает форму кривых модуля и фазы частотной характеристики. Она дает нам качественную информацию о динамических свойствах соответствующей механической системы.

• **Вычет** представляет собой математическое понятие и не имеет прямой интерпретации в физических терминах. Он содержит абсолютный масштаб частотной характеристики и за счет этого и информацию об уровне кривой модуля. Позднее мы увидим, что вычет связан с третьим модальным параметром, т.е. с формой моды.

Вычет иногда называют напряженностью полюса, но амплитуда моды определяется не только вычетом. Она представляет собой отношение вычета и скорости затухания, т.е.

$$H(\omega_d) \approx \frac{R}{\sigma}$$

На рисунке показан пример, иллюстрирующий свойства координаты полюса и вычета. При упрощенном подходе с учетом системы с одной степенью свободы высококачественный проигрыватель мог бы иметь такое же распределение жесткости, затухания и массы, что и автомобиль, а следовательно, такую же координату полюса. Частотные характеристики таких объектов имели бы одинаковую форму, но их реакции на воздействие единичной силы были бы совершенно различными. Это различие может быть обнаружено в вычетах.



Степени свободы и модели систем с несколькими степенями свободы

Предыдущие модели относились к случаю одной степени свободы, т.е. к перемещению в одном направлении. Реальные конструкции имеют много точек, которые могут перемещаться независимо друг от друга, т.е. они являются системами с несколькими степенями свободы. Для определения частотной характеристики реальной конструкции необходимо замерить силу возбуждения и реакцию в двух точках. Однако, каждая точка может перемещаться максимально в шести возможных направлениях и поэтому необходимо также определить направление перемещения.

- **Степень свободы (СС)** представляет собой *определенную точку и направление ее перемещения*. Индекс i используется для указания степени свободы реакции, а индекс j - для степени свободы возбуждения. Дополнительные индексы x , y и z могут быть использованы для указания направления.

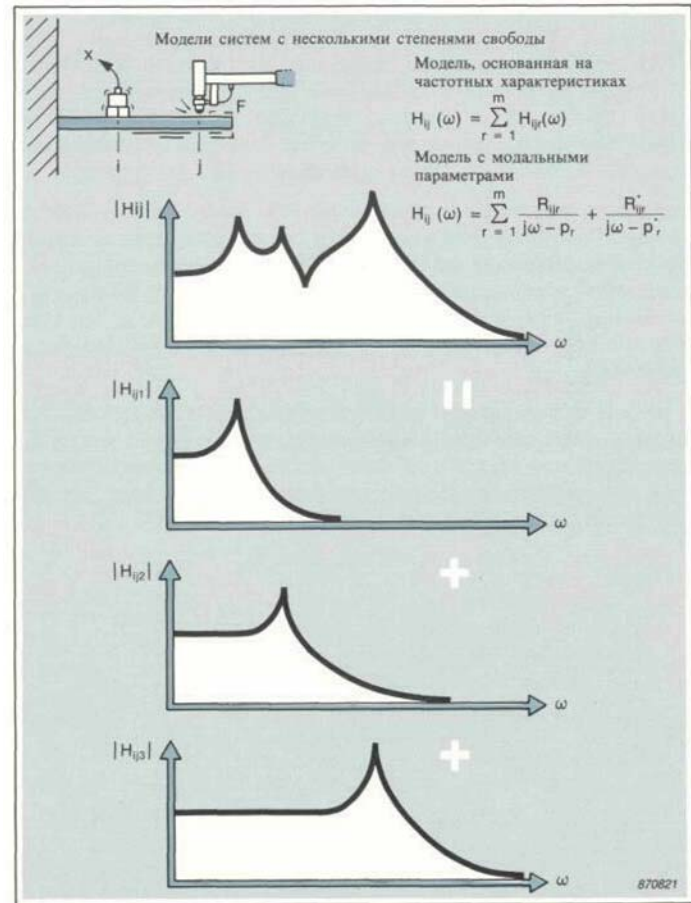
Таким образом
$$H_{ij}(\omega) = \frac{X_i(\omega)}{F_j(\omega)}$$

Написав функцию $H_{ij}(\omega)$ двумя способами, можно получить две модели систем с несколькими степенями свободы. Эти модели описаны уравнениями на рисунке.

- **Модель системы с несколькими степенями свободы, основанная на частотных характеристиках**, представляет функцию $H_{ij}(\omega)$ как сумму частотных характеристик систем с одной степенью свободы, по одной функции для каждой моды в пределах учитываемого частотного диапазона, причем g - порядковый номер моды, а m - число мод в модели.

- **Модель системы с несколькими степенями свободы, основанная на модальных параметрах,** определяет функцию $H_{ij}(\omega)$ в терминах координат полюсов и присущих отдельным модам вычетов. Эта модель указывает на два важных свойства модальных параметров, т.е.

- **Модальная частота и затухание являются глобальными параметрами.** Координата полюса имеет только модальный номер (r) и не зависит от учитываемой степени свободы.
- **Вычет является локальным параметром.** Индекс (ijr) связывает вычет с конкретной комбинацией степеней свободы и конкретной модой.



Что такое форма мод?

Форма мод представляет собой, как уже было показано в примере с колоколом на стр. 4, деформацию, связанную с конкретной модальной частотой или с координатой полюса. Ее трудно представить себе и наблюдать. Она представляет собой абстрактный математический параметр, который определяет деформацию, как если бы эта мода существовала отдельно от всех остальных мод колебаний конструкции.

Истинное физическое перемещение в любой точке всегда является комбинацией всех мод колебаний конструкции. При гармоническом возбуждении, близком к модальной частоте, 95% перемещений может быть связано с соответствующей конкретной формой мод, а при случайном возбуждении имеется тенденция к произвольной комбинации всех форм мод.

В любом случае, форма мод представляет собой внутреннее динамическое свойство совершающей «свободные» механические колебания (без воздействия внешних сил) конструкции. Она отображает *относительное перемещение* всех частей конструкции для конкретной моды.

- **Выделенные формы мод $\rightarrow$ вектор формы мод**

Формы мод являются непрерывными функциями, которые при анализе выделяются с «пространственным разрешением», зависящим от числа учитываемых степеней свободы. В общем случае они не измеряются непосредственно, а определяются по набору присущих заданным степеням свободы частотных характеристик. Выделенная форма мод представляется с помощью вектора формы мод $\{\psi\}_i$, где i - номер моды.

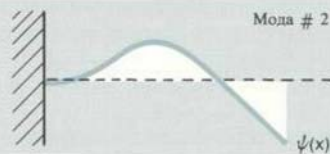
- **Модальное перемещение**

Составляющие ψ_i вектора формы мод представляют собой относительные перемещения, присущие отдельным степеням свободы (i). Обычно они являются комплексными числами, отображающими как амплитуду, так и фазу перемещения.

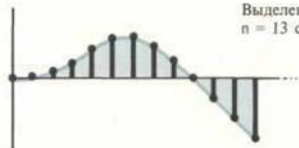
Формы мод колебаний



Мода # 2

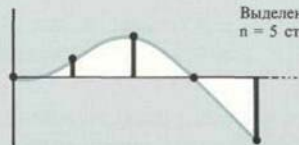


Выделенная форма моды
n = 13 степеней свободы



$$\{\psi\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 12 & 0 \\ 38 & 0 \\ 60 & 0 \\ 94 & 0 \\ 116 & 0 \\ 125 & 0 \\ 114 & 0 \\ 78 & 0 \\ 0 & 0 \\ -30 & 180 \\ -65 & 180 \\ -90 & 180 \end{Bmatrix}$$

Выделенная форма моды
n = 5 степеней свободы



$$\{\psi\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 60 & 0 \\ 125 & 0 \\ 0 & 0 \\ -90 & 180 \end{Bmatrix}$$

Нормальные моды и комплексные моды

Моды колебаний могут быть подразделены на два класса.

- **Нормальные моды**

Нормальные моды характерны тем, что все части конструкции перемещаются в фазе или в противофазе (со сдвигом 180°) по отношению друг к другу. Поэтому модальные перемещения ψ_{it} представляют собой действительные величины, принимающие положительные или отрицательные значения. Нормальные моды можно рассматривать как стоячие волны с неподвижными узловыми линиями.

- **Комплексные моды**

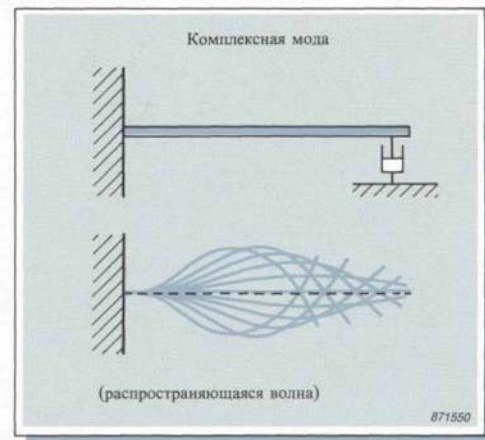
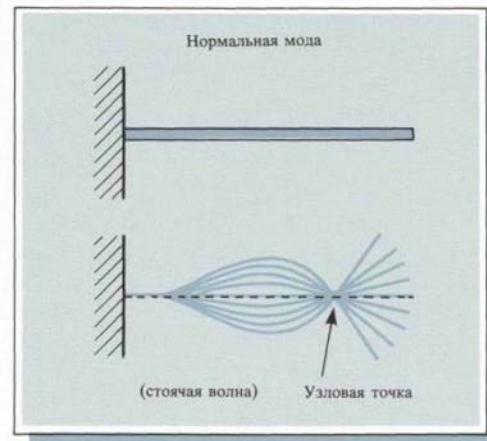
Комплексные моды могут иметь какое угодно соотношение между фазами в различных частях конструкции. Модальные перемещения ψ_{it} представляют собой комплексные величины и они могут иметь любое значение фазы. Формы комплексных мод могут рассматриваться как распространяющиеся волны без стационарных узловых линий.

- **Когда можно ожидать наличие нормальных/комплексных мод**

Распределение затухания в конструкции определяет наличие нормальных или комплексных мод. Когда конструкция имеет очень малое затухание или затухание вообще отсутствует, моды будут нормальными. Если затухание распределено так же, что и инерция и жесткость (пропорциональное затухание), можно ожидать наличие нормальных мод.

Конструкции с локализованным затуханием, такие как кузова автомобилей с точечной сваркой и амортизаторами, имеют комплексные моды.

Предупреждение. Формы мод, определенные по небольшому количеству замеров, могут указывать на комплексные моды 18 в конструкциях, в которых имеются лишь нормальные моды.



Связь вычетов и форм мод

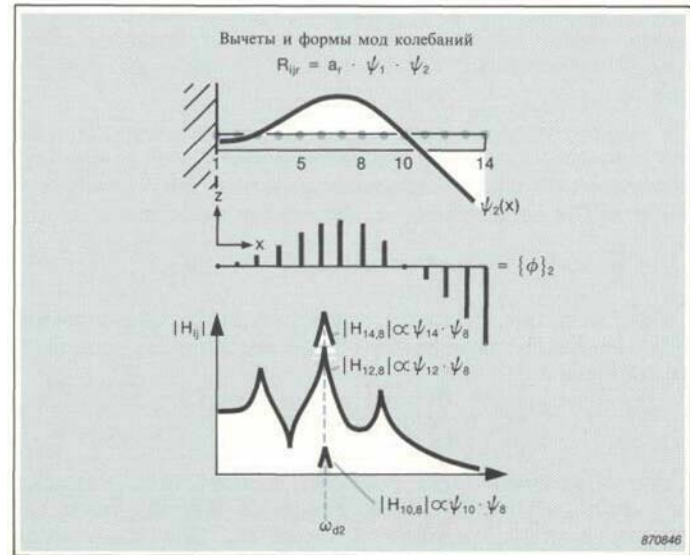
На стр. 9 было показано, что вычет пропорционален модулю частотной характеристики. При модальной частоте (ω_{dr}) модуль частотной характеристики дается выражением

$$H_{ij}(\omega) \Big|_{\omega = \omega_{dr}} \approx \frac{R_{ijr}}{\sigma_r}$$

Можно показать, что присущий конкретной моде (r) вычет пропорционален произведению модальных перемещений ψ (соответствует степени свободы реакции) и ψ_{jr} (соответствует степени свободы силы возбуждения).

$$R_{ijr} \propto \psi_{ir} \cdot \psi_{jr}$$

На рисунке показаны вторая мода колебаний консольной балки, когда сила возбуждения приложена в точке, соответствующей при степени свободы 8, и реакции, замеренные в соответствующих трем степеням свободы точках. Следует отметить, что форма резонансных кривых одинакова во всех случаях, а амплитуда пропорциональна модальным перемещениям.



Вектор формы мод $\{\psi\}_r$ определяет *относительное* перемещение точек, соответствующих отдельным степеням свободы. Следовательно, значения составляющих ψ_{ir} неоднозначны.

По результатам измерений частотных характеристик определяются вычеты, которые однозначны. Связь между вычетом и связанными с ним перемещениями позволяет определить масштабный коэффициент a_r для каждой моды, т.е.

$$R_{ijr} = a_r \cdot \phi_{ir} \cdot \phi_{jr}$$

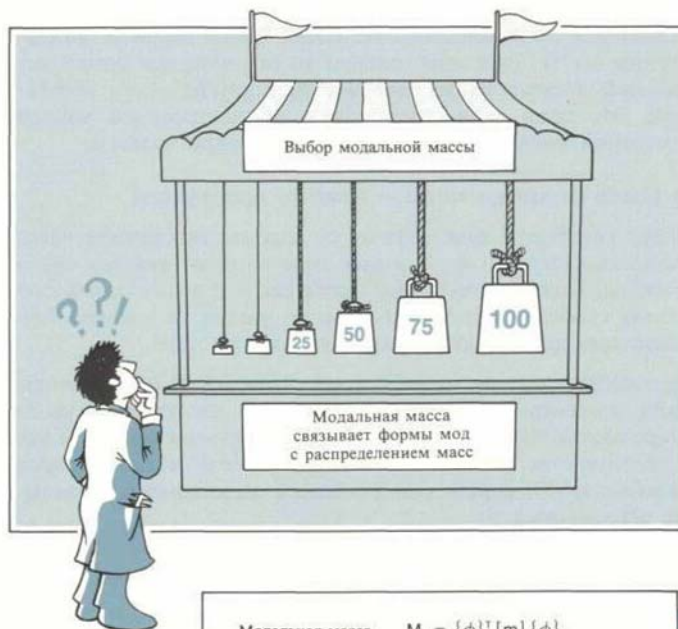
где ϕ_{ir} и ϕ_{jr} представляют собой модальные перемещения. Для измерений, проводимых в точке возбуждения, получается выражение

$$R_{ijr} = a_r \cdot \phi_{jr}^2$$

Строгие математические выкладки по анализу мод колебаний дают зависимость (приведенную на рисунке) между вектором мод $\{\phi\}_r$ и *модальной массой* M_r . При применении этого соотношения к случаю с одной степенью свободы (когда имеется только одно перемещение и одна масса) можно провести оценку величины a_r .

Что такое модальная масса? Модальная масса не связана с массой конструкции и не может быть замерена. Это лишь математический прием. Модальная масса может иметь любое значение за исключением нуля. Мы можем выбрать ее значение, а затем рассчитать a_r . Для простоты в дальнейшем будет учитываться масштабирование с единичной модальной массой ($M_r = 1$).

Масштабирование форм мод. По результатам измерений в точке возбуждения можно получить вычеты R_{ijr} для отдельных мод. Расчетные величины a_r дают возможность определения масштабированных перемещений ϕ_{jr} . По результатам измерений реакции можно затем провести масштабирование величин ϕ_{ir} и получить масштабированные формы мод.



Модальная масса $M_r = \{\phi\}_r^T [m] \{\phi\}_r$

для одной степени свободы $M = \phi^T m \phi$

и
$$R = \frac{1}{2j\omega_d m} = a \cdot \phi \cdot \phi$$

следовательно,
$$a = \frac{1}{2j\omega_d M}$$

для нескольких степеней свободы $M_r = 1$ и $a_r = \frac{1}{2j\omega_{dr}}$

Модальная связь

Модальная связь представляет собой общее понятие, указывающее на то, насколько сильно на реакцию при одной модальной частоте оказывают влияние другие моды колебаний. Эту связь можно наблюдать на построенной кривой частотной характеристики вблизи модальной частоты.

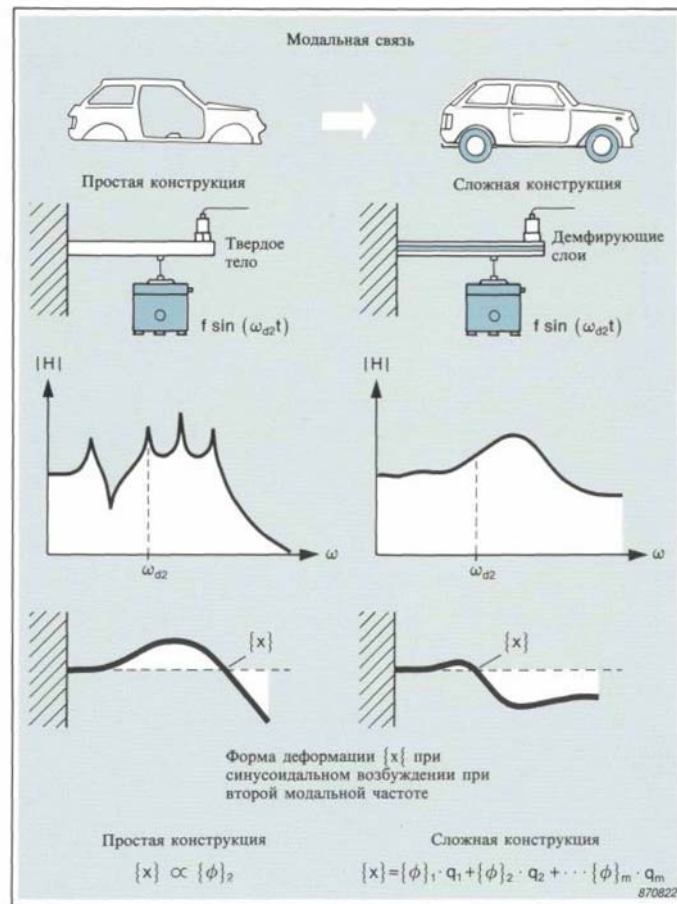
- Слабо связанные моды — простые конструкции

Моды колебаний конструкции со слабым затуханием четко разделены друг от друга и при этом говорят, что они слабо связаны. Такие системы ведут себя как системы с одной степенью свободы вблизи модальных частот, а соответствующие конструкции получили названия простых.

При исследованиях подобных конструкций простые методы дают достоверные результаты. Простые конструкции часто встречаются при проведении поиска неисправностей, так как в большинстве случаев проблемы с шумом, механическими колебаниями и усталостью связаны с мало демпфированными резонансами.

- Сильно связанные моды — сложные конструкции

Частотные характеристики конструкций с сильным затуханием или высокой модальной плотностью не указывают на четко разделенные моды. При этом говорят, что моды сильно связаны, а реакция при любой частоте представляет собой комбинацию многих мод. Сложные конструкции могут быть все-таки описаны с помощью дискретного набора мод, но методы, необходимые для определения модальных параметров, более сложные.



Предположения модального описания

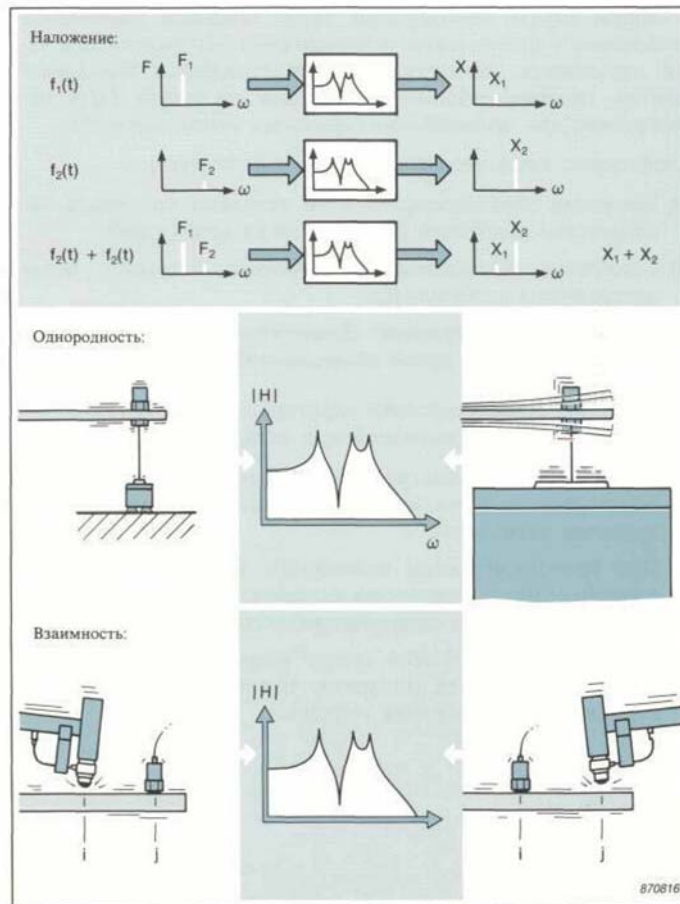
На предыдущей странице были рассмотрены понятия высокой модальной плотности и сильного затухания. Но ни один из этих двух факторов не мешает применению к конструкции модального описания. Они только усложняют используемые методы.

Лишь одно предположение необходимо сделать - предположение о линейности.

• Линейность

Необходимо предположить, что исследуемые системы имеют линейные свойства, т.е. что реакция всегда пропорциональна силе возбуждения. Это предположение имеет три следствия для измерений частотных характеристик.

- **Наложение.** Измеряемые частотные характеристики не зависят от типа и формы волны возбуждения. Возбуждение синусоидальной силой с разверткой частоты дает те же результаты, что и возбуждение широкополосной случайной силой.
- **Однородность.** Измеряемые частотные характеристики не зависят от уровня возбуждения.
- **Взаимность.** В линейной механической системе существует частная симметрия, которая описывается теоремой взаимности Максвелла. Отсюда следует, что измеряемые частотные характеристики не зависят от того, какая точка используется для возбуждения, а какая - для измерения реакции.



Практические конструкции

В общем случае конструкции будут обладать линейными свойствами с небольшими отклонениями. Но линейность часто нарушается, когда деформации становятся большими. Именно поэтому модальное описание не может быть использовано для предсказания серьезных неисправностей.

Необходимо предположить, что наши конструкции:

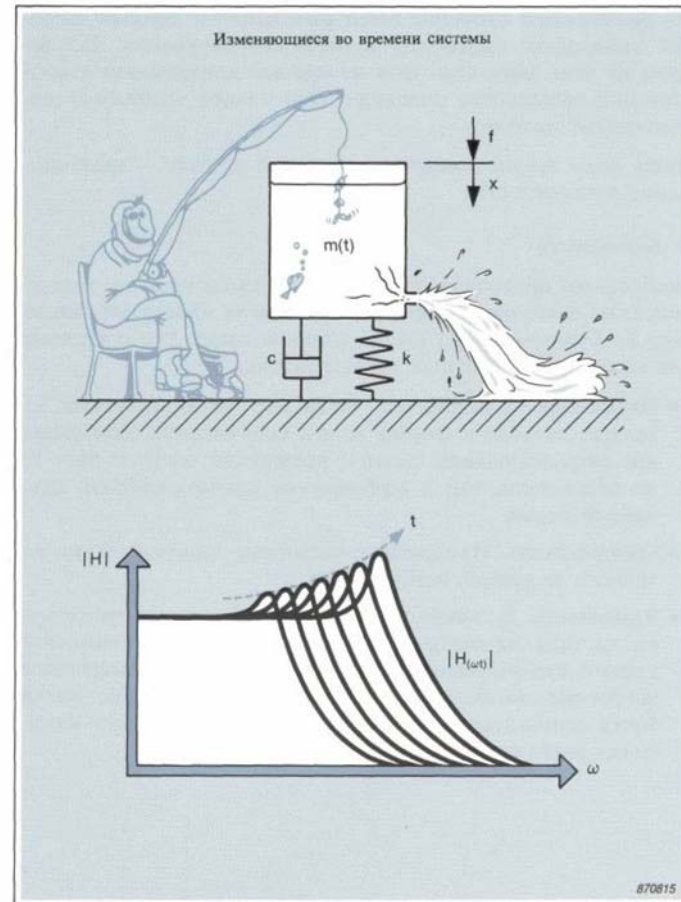
- **Причинно обусловлены.** Они не начинают совершать механические колебания до того, как их возбуждают.
- **Устойчивы.** Механические колебания затухают после прекращения возбуждения.
- **Инвариантны по времени.** Динамические характеристики не изменяются во время исследований.

Примечание. Характеристики некоторых конструкций изменяются во время исследований или испытаний.

Характеристики конструкции с малой массой могут изменяться вследствие нагрузки, обусловливаемой используемыми датчиками.

При продолжительных испытаниях характеристики конструкции могут изменяться вследствие изменений температуры или других окружающих условий.

Некоторые конструкции могут непрерывно изменяться. Масса летательного аппарата, например, будет уменьшаться по мере сгорания топлива.



Модель с сосредоточенными параметрами и модальная теория

Большая часть теории модального анализа базируется на векторном и матричном математическом анализе. В данной работе мы не предполагаем приводить строгие математические выкладки, но для понимания того, почему методы анализа справедливы, мы рассмотрим некоторые теоретические аспекты.

• Модель с сосредоточенными параметрами

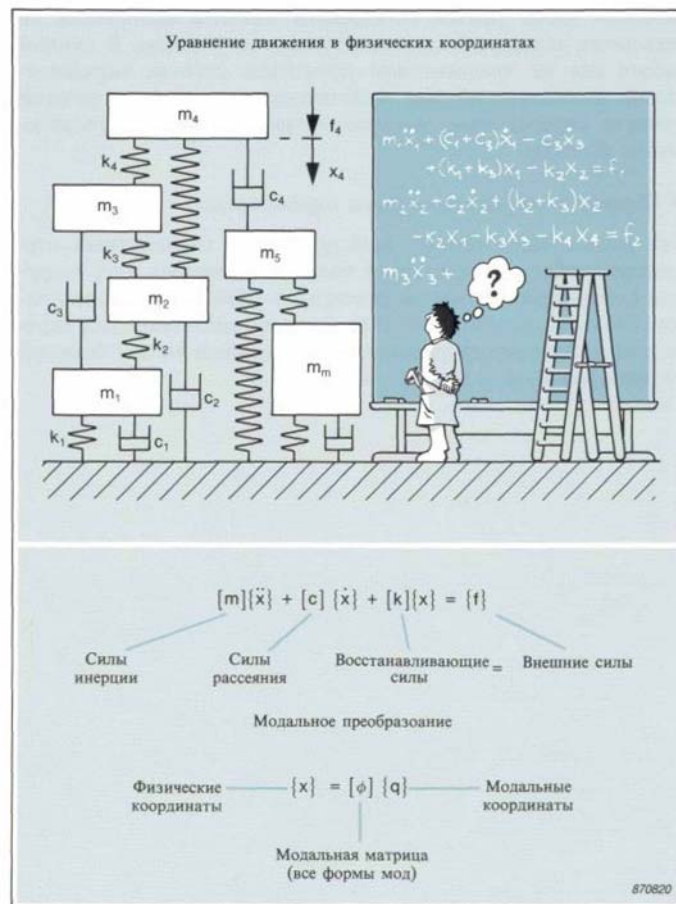
Эта модель представляет конструкцию с несколькими степенями свободы в виде серии масс, соединенных друг с другом с помощью пружин и демпферов. Применяв второй закон Ньютона, можно получить систему уравнений для перемещения, по одному уравнению для каждой массы (каждой степени свободы) в данной модели.

Математическим примером, используемым для систематизации этих уравнений, является матричная запись. Матрица масс будет содержать значения одиночных масс, а матрицы жесткостей и затуханий будут содержать комбинации значений, которые связывают все уравнения друг с другом. Эта связь говорит о том, что прилагаемая к одной массе сила вызывает реакцию всех остальных, что усложняет проведение анализа данной модели.

Распределения массы, затухания и жесткости реальных конструкций обычно неизвестны, но можно определить координаты полюсов (затухание и модальные частоты) и вычеты и получить масштабированные формы мод. С помощью этих параметров можно преобразовать модель с сосредоточенными параметрами.

• Модальное преобразование

Если заменить физические координаты в уравнении перемещений (в матричной форме) на произведение модальной матрицы (все векторы масштабированных форм мод как колонки) и модальных координат, то тем самым выполняется переход в другую область, называемую модальным пространством.

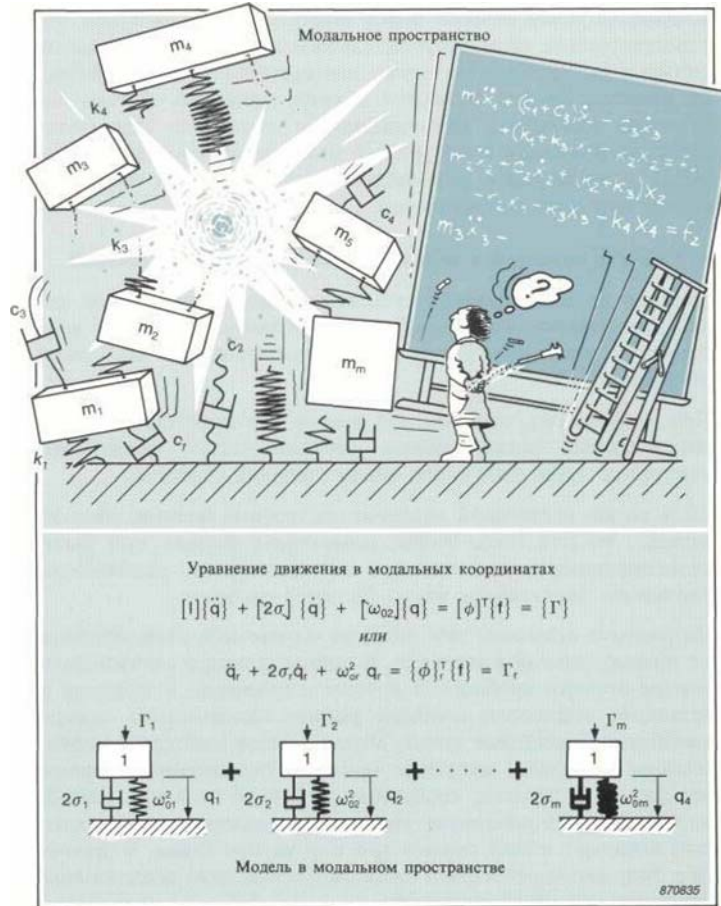


Модальное пространство

Переход в модальное пространство оказывает сильное влияние на модель с сосредоточенными параметрами. Уравнения для перемещений становятся независимыми и могут рассматриваться как набор уравнений независимых моделей с одной степенью свободы, по одной для каждой моды в модели с несколькими степенями свободы (для каждой модальной координаты).

Каждая модель имеет массу, равную единице (единичную модальную массу), коэффициент затухания, равный ширине частотной полосы моды, и жесткость, равную квадрату собственной частоты незатухающих колебаний. Возбуждение отдельных моделей происходит модальной силой, равной скалярному произведению формы мод и вектора физической силы (т.е. проекции силы на форму мод). Эта модальная сила может быть интерпретирована как способность заданного распределения сил возбуждать данную моду.

В данном положении можно написать уравнения в терминах модальных параметров с получением решения в модальных координатах. Уравнение для каждой координаты может быть решено отдельно как уравнение, описывающее систему с одной степенью свободы. *После масштабирования форм мод с помощью единичной модальной массы уравнения имеют вид зависимостей от простых, измеряемых параметров: собственной частоты, модального затухания и масштабированной формы мод.*



Характеристика степеней свободы

Свободная точка обычно имеет шесть степеней свободы, соответствующих трем поступательным и трем вращательным движениям. Удобных датчиков для вращательного движения не имеется, но для описания общего движения обычно достаточно учитывать поступательные движения. Для большинства реальных конструкций достаточно провести измерения в нескольких равномерно расположенных точках в одном или двух направлениях.

• Сколько степеней свободы необходимо для испытаний?

Количество необходимых степеней свободы зависит от целей проводимых испытаний, от геометрической формы конструкции и от количества мод в учитываемом частотном диапазоне.

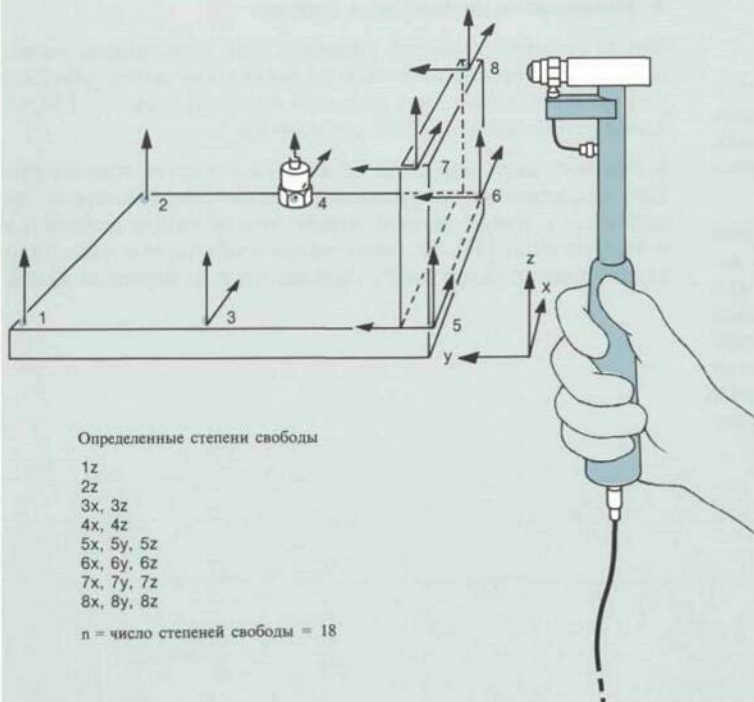
При испытаниях, проводимых только для простой проверки определенных аналитическим методом частот, достаточно учитывать лишь небольшое число степеней свободы.

Если целью испытаний является построение математической модели, то для того, чтобы замеренные формы мод были ортогональными или линейно независимыми, необходимо учитывать достаточное число степеней свободы.

На рисунке показаны два примера измерений, выполненных на прямоугольной пластинке. В одном примере учитывались четыре степени свободы, в другом - тридцать. В примере с четырьмя степенями свободы видны максимально четыре линейно независимые моды. Моды с более высокими порядковыми номерами являются простым повторением первых четырех мод. Модель, созданная на основе этих измерений, может быть использована только в диапазоне частот, который включает в себя первые три или четыре моды. В примере с тридцатью степенями свободы формы двух высших мод представлены приблизительно.

Примечание. Число степеней свободы должно быть выбрано с учетом надежного представления общей динамики системы. Геометрическая сложность форм мод в большей степени, чем количество ожидаемых мод, определяет необходимое число степеней свободы.

Степени свободы

Измерения $H_{4z,8y}$ 

Мода	30 степеней свободы	4 степени свободы
# 1:		
# 2:		
# 3:		
# 4:		
# 5:		
# 6:		
# 7:		
# 8:		
# 9:		
#10:		
#11:		
#12:		

Степени свободы и матрица подвижностей

- **Входные/выходные комбинации**

На рисунке показана конструкция с двумя *определенными* степенями свободы, каждая из которых представляет собой входную/выходную точку при измерениях частотных характеристик. Если мы имеем p определенных степеней свободы, то число возможных входных/выходных комбинаций составляет $p \times p$.

- **Матрица подвижностей**

Отдельные частотные характеристики могут быть представлены в виде элементов матрицы, известной под названием матрицы подвижностей $[H]$. Каждый элемент матрицы $H_{ij}(\omega)$ представляет собой результат измерений отдельной частотной характеристики.

Каждая строка матрицы подвижностей содержит частотные характеристики с общей степенью свободы реакции, а в каждой колонке матрицы имеются частотные характеристики с общей степенью свободы силы возбуждения. По диагонали матрицы $[H]$ расположен класс частотных характеристик, для которых степени свободы реакции и силы возбуждения идентичны друг другу. Они представляют собой *точечные частотные характеристики*. Элементы вне диагонали представляют собой *передаточные частотные характеристики*.

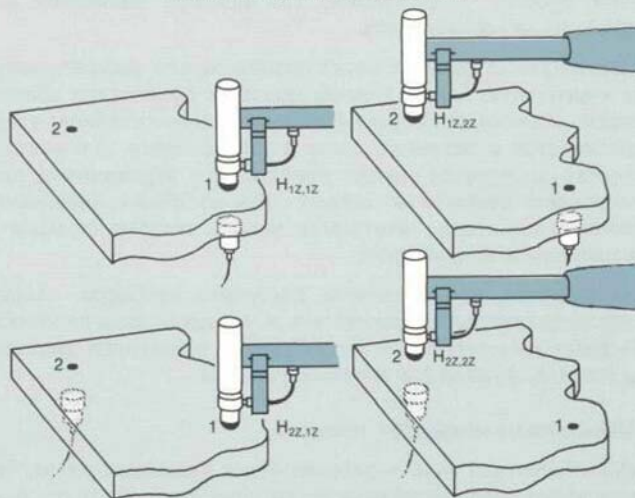
Примечание. Понятие подвижности используется в общем смысле и может представлять собой податливость, подвижность или ускоряемость. В моделях матрица $[H]$ обычно является матрицей податливостей, а при измерениях обычно учитывается ускоряемость (см. часть 1 «Измерения механической подвижности»).

- **Минимально необходимые данные**

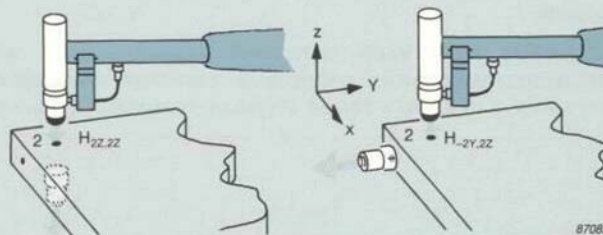
Число степеней свободы, заданных при испытаниях, может лежать в диапазоне от десяти до нескольких сотен. Матрица $[H]$ может поэтому быть слишком большой (при $p = 100$ матрица $[H]$ содержит 10000 элементов).

К счастью, здесь приходит на помощь свойство взаимности. Вся информация по линейной механической системе содержится в одной полной строке или в одной полной колонке матрицы $[H]$. Поэтому число необходимых частотных характеристик равно числу определенных степеней свободы.

Комбинации входов и выходов для
системы с двумя степенями свободы



Матрица подвижностей $[H] = \begin{bmatrix} H_{1Z,1Z} & H_{1Z,2Z} \\ H_{2Z,1Z} & H_{2Z,2Z} \end{bmatrix}$



Модальные испытания простой конструкции

Чтобы ознакомиться с методами, используемыми для выделения модальных параметров, рассмотрим проведение испытаний простой конструкции, т.е. пример, типичный для отыскания неисправностей.

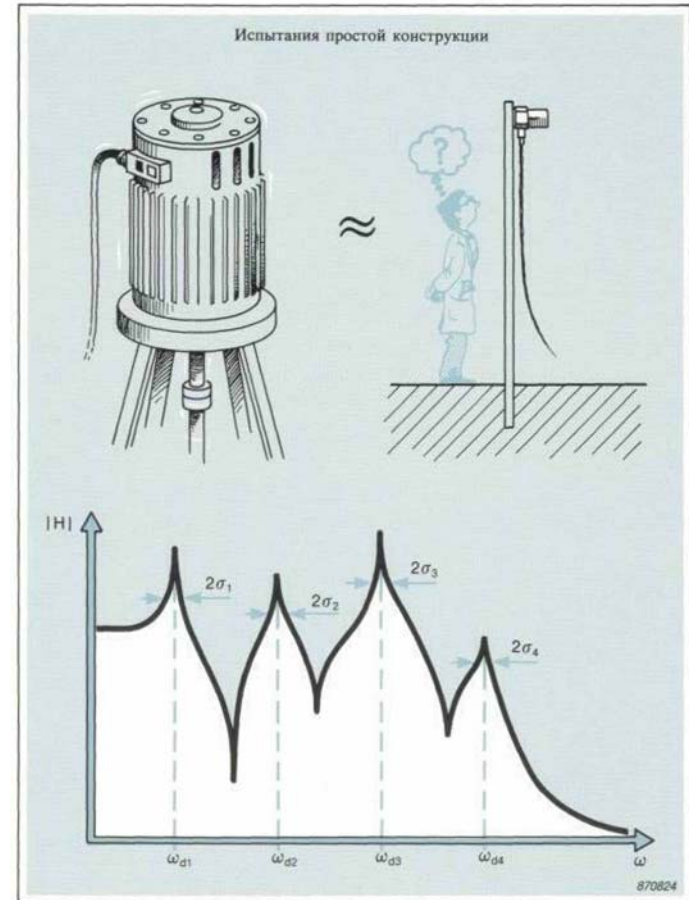
Показанную на рисунке конструкцию можно рассматривать как консольную балку. Самым простым приборным обеспечением является двухканальный анализатор сигналов, ударный молоток с датчиком силы и акселерометр, с помощью которого замеряется сигнал реакции. Мы ограничимся рассмотрением нескольких первых мод изгибных колебаний. Поэтому достаточно учитывать четыре степени свободы в вертикальном направлении.

Предположим, что проведена настройка приборов, выполнена предварительная подготовка и что проведены несколько обзорных измерений для оптимизации частотного диапазона, весовых функций и входных условий.

• Определение координат полюсов

Любая частотная характеристика будет указывать на то, что балка имеет слабо связанные моды колебаний. Поэтому конструкция будет вести себя как система с одной степенью свободы вблизи модальных частот, где можно предположить, что все реакции вызваны только соответствующими модами.

По любой замеренной частотной характеристике можно определить модальные частоты и значения коэффициента затухания и получить таким образом координаты полюсов.

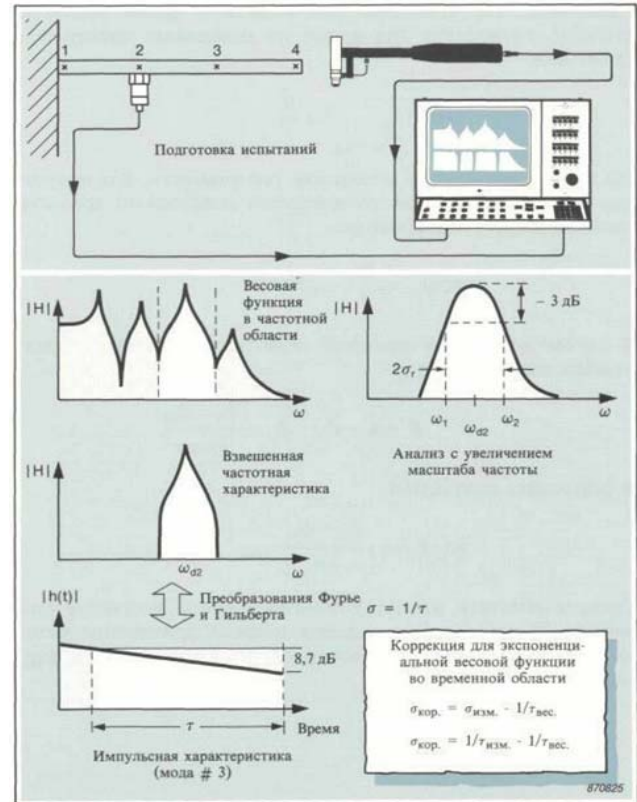


- Модальные частоты определяются путем простого выявления максимальных значений модуля частотной характеристики.
- Модальные затухания определить не так просто, так как их определение часто связано с погрешностями и с самой большой степенью неопределенности.

Одним из методов, которым можно воспользоваться при экспериментальном определении параметров затухания, является определение ширины частотной полосы при -3 дБ. Конструкции с малым демпфированием имеют острые резонансы, а пики слишком узкие для обеспечения достаточной точности результатов измерений ширины полосы. Эта проблема часто может быть устранена путем анализа с увеличением масштаба частоты для получения достаточного разрешения по частоте при измерениях.

Как вариант можно воспользоваться методом частотного взвешивания, при котором поочередно изолируются отдельные моды колебаний. Последующее применение преобразований Фурье и Гильберта обеспечит получение присущих отдельным модам импульсных характеристик. На кривой амплитуды импульсной характеристики в логарифмическом масштабе затухание имеет вид прямой линии. По ней можно определить время затухания τ , соответствующее уменьшению амплитуды (уровня) на 8,7 дБ. Скорость затухания a представляет собой величину, обратную времени затухания, т.е. $\sigma = 1/\tau$.

На основе результатов соответствующих измерений можно определить координаты полюсов, но нам также необходимо определить соответствующие формы мод.



Определение форм мод методом квадратур

Напомним, что уравнение для модели с одной степенью свободы, записанное для одной из модальных частот ω_{dr} , имеет вид:

$$H(\omega) \Big|_{\omega = \omega_{dr}} \approx \frac{R}{\sigma}$$

Но так как проводятся измерения ускоряемости, для получения модели в терминах ускоряемости необходимо провести двойное дифференцирование:

$$A(\omega)_{dr} \approx \frac{R}{\sigma} (-\omega_{dr}^2)$$

В случае нескольких степеней свободы можно вычесть пред-
ставить выражением:

$$R = a_r \cdot \phi_{ir} \cdot \phi_{jr} = \frac{\phi_{ir} \cdot \phi_{jr}}{2j \omega_{dr}}$$

В результате получается:

$$A(\omega)_{dr} \approx j \frac{\phi_{ir} \cdot \phi_{jr}}{2 \sigma} \cdot \omega_{dr}$$

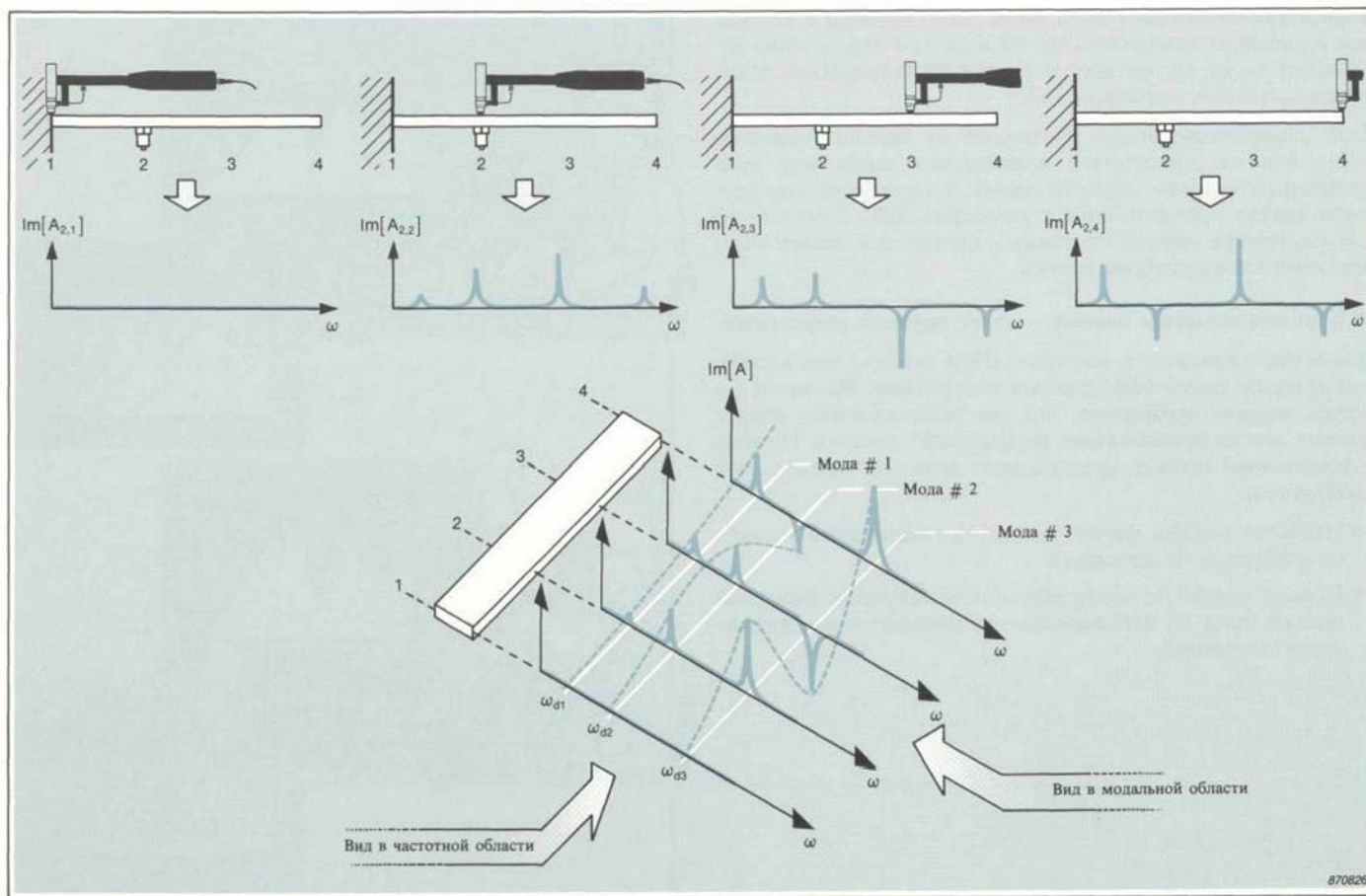
Следует отметить, что $A(\omega)$ является мнимой величиной при модальной частоте. Это является основой примерения метода квадратур, с помощью которого можно определить формы мод колебаний.

Частотная характеристика становится чисто мнимой при модальной частоте. Ее модуль пропорционален модальному перемещению, а ее знак положительный, если перемещение совпадает по фазе с силой возбуждения.

Формы мод могут быть определены, если принять степень свободы реакции или возбуждения в качестве опорной, а затем провести серию измерений. Мнимые части замеренных частотных характеристик могут быть подобраны при модальных частотах, при которых они представляют присущие соответствующим модам модальные перемещения.

В нашем примере в качестве опорной используется степень свободы # 2. После этого проводится измерение серии частотных характеристик путем поочередного возбуждения каждой из четырех заданных точек.

Четыре значения мнимых частей частотных характеристик для каждой модальной частоты определяют соответствующую форму моды. Если измерения были проведены с помощью калиброванной аппаратуры, то может быть проведено масштабирование форм отдельных мод.



Оценка параметров с помощью подбора кривых

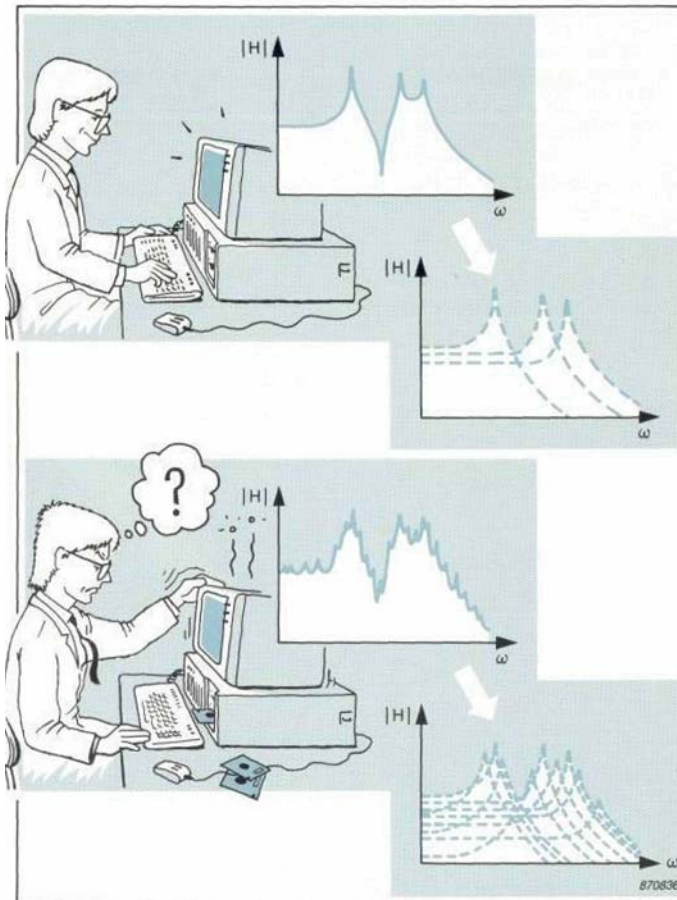
В предыдущем примере были моды слабо связаны и модальные параметры находились путем простого определения некоторого числа дискретных значений по результатам измерений частотных характеристик.

Если замеренные данные указывают на сильно связанные моды или на присутствие паразитного шума или если необходима высокая точность оценки, то целесообразно провести анализ мод колебаний с помощью ЭВМ. После этого для улучшения оценки модальных параметров может быть применен метод подбора кривых.

• Хорошие исходные данные — залог хороших результатов

Для осуществляемого с помощью ЭВМ анализа мод колебаний имеется много эффективных алгоритмов. Но какой бы метод оценки параметров мы не использовали, *оценка должна всегда основываться на надежных данных, которые в достаточной степени представляют динамику исследуемой конструкции:*

- Наиболее важной частью модальных испытаний являются измерения подвижности.
- Подбор кривой не может обеспечить получение надежной оценки, если он основывается на недостаточных результатах измерений.



Что такое подбор кривой?

Подбор кривой является этапом, на котором происходит сравнение математической теории и результатов практических измерений. Теория обеспечивает построение математической параметрической модели на основе теоретических частотных характеристик конструкции, а результаты измерений дают реальные частотные характеристики. Подбор кривой является аналитическим процессом определения математических параметров, которые как можно точно совпадают с замеренными данными.

Давайте рассмотрим этот процесс, изучив эксперимент по определению податливости (обратной величины жесткости) спиральной пружины. При приложении грузов (нагрузочной массы) мы можем наблюдать и построить в виде графика результирующие перемещения. При предположении линейной зависимости между силой и отклонением можно написать выражение:

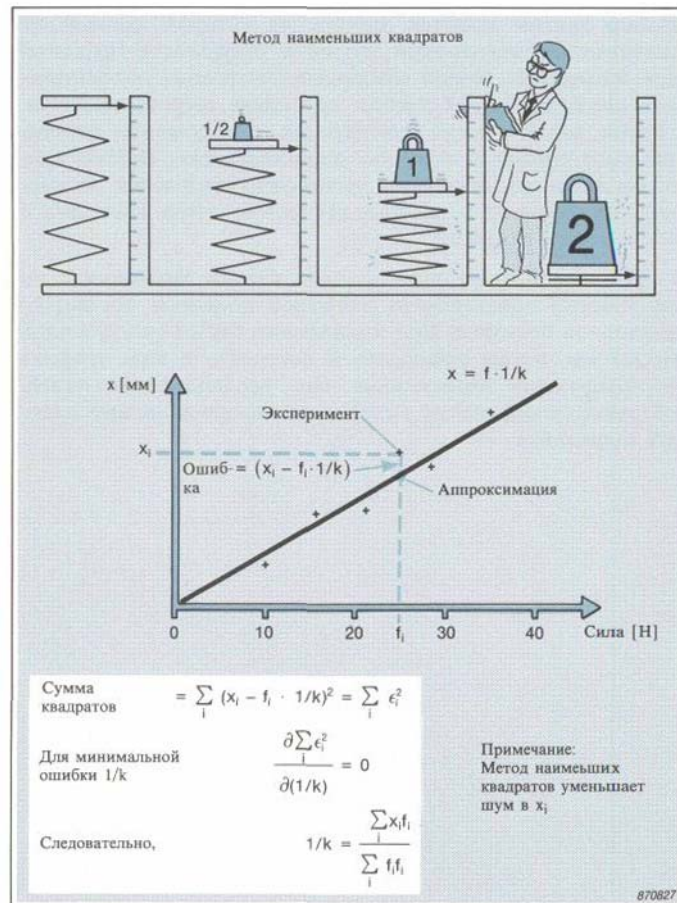
$$x = f \cdot 1/k$$

В этом случае имеется только одна неизвестная ($1/k$) и поэтому достаточно использовать лишь одну пару замеров. Однако, при применении всех экспериментальных данных получается наилучшая оценка для $1/k$.

Если грузы откалиброваны, то прилагаемая сила точно известна. Любое отклонение от прямой линии может происходить только вследствие ошибки измерения перемещения (погрешность показаний).

• Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов (МНК), показанный на рисунке, является одним из методов, используемых для сведения до минимума разницы между экспериментальными данными и предсказываемыми значениями. Он может использоваться с любой математической моделью, включая модели систем с одной степенью свободы или с несколькими степенями свободы.



Средства подбора кривых при анализе мод колебаний

Процесс оценки модальных параметров по результатам измерений частотных характеристик очень похож на предыдущий пример.

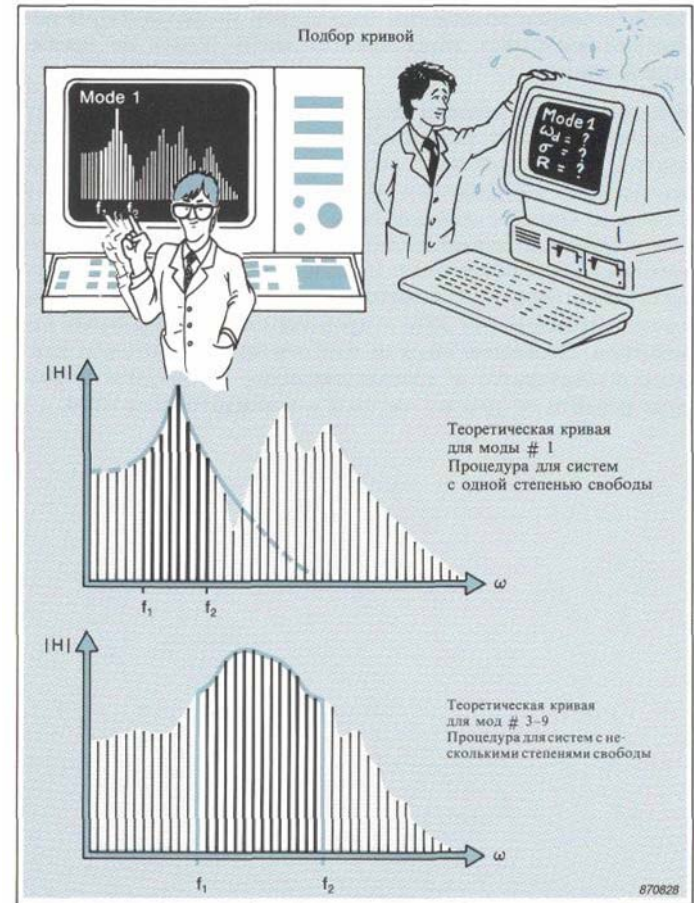
Для повышения степени достоверности оценки модальных параметров может использоваться метод наименьших квадратов. Для каждой моды необходимо провести оценку двух неизвестных комплексных параметров, координаты полюса и вычета. Однако, определяемые двухканальным анализатором частотные характеристики содержат около 800 комплексных значений каждая. В связи с необходимостью работы с таким огромным количеством данных важное значение имеет использование ЭВМ в процессе оценки модальных параметров. Появление средств подбора кривых методом наименьших квадратов и соответствующих алгоритмов позволило перейти от ручных методов к использованию ЭВМ.

Метод наименьших квадратов сам по себе уменьшает влияние случайных шумов, присутствующих при измерениях. Его применение сопровождается сглаживанием данных. Этот метод в общем случае не уменьшает влияние систематических ошибок, таких как ошибки рассеяния или фазовые ошибки измерений, которые будут продолжать приводить к ошибочным оценкам параметров.

В настоящее время имеется большое количество средств подбора кривых различного типа, рассмотрение которых выходит за рамки данной работы. Однако, целесообразно рассмотреть некоторые моменты.

Понятие «подбор кривой» происходит от общей процедуры, при которой после оценки параметров подбирается и строится аналитическая кривая, накладываемая на полученные экспериментальным путем данные. Оператор затем оценивает совпадение.

Хорошее средство подбора кривых должно быть простым и допускать применение в режиме диалога с оператором. Если имеется возможность выбора среди нескольких средств подбора кривых, то следует остановиться на самом простом при условии, что оно подходит для обрабатываемых экспериментальных данных. Такое средство обычно оказывается наилучшим для использования и самым быстрым в работе.



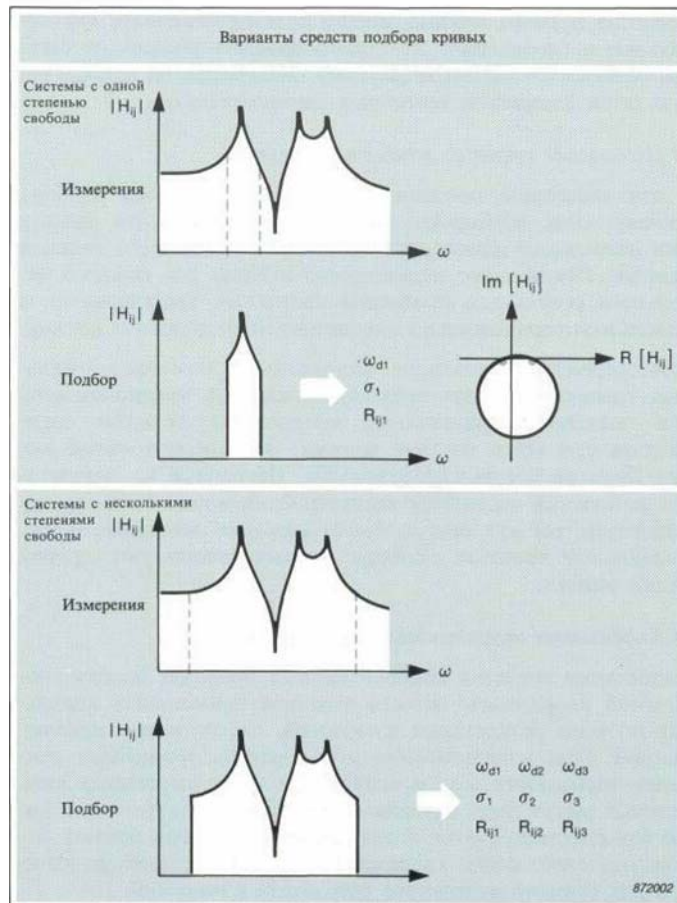
Подбор кривых служит для выделения надежных модальных данных из результатов измерений. Хотя хорошая кривая может быть необходимой, но сама по себе она не является достаточной. Оператор должен сам судить о правильности методики и надежности полученных результатов.

- **Средства подбора кривых для систем с одной степенью свободы**

Средства подбора кривых для систем с одной степенью свободы используются для систем со слабо связанными модами, у которых можно предположить наличие характеристик систем с одной степенью свободы вблизи модальных частот. Оператор должен выбрать частотную полосу вблизи каждой модальной частоты, в которой это предположение может быть справедливо. Это всегда представляет компромисс между включением как можно большего числа данных для достижения наилучшей статистической оценки и стремлением отойти как можно дальше от области резонанса других частот, где предположение об одной степени свободы становится несправедливым.

- **Средства подбора кривых для систем с несколькими степенями свободы**

Средства подбора кривых для систем с несколькими степенями свободы используются в случае сильно связанных мод. Оператор должен задать частотный диапазон, в котором используемое средство подбора кривых будет подбирать параметры. Некоторые алгоритмы всегда определяют достаточное количество мод для построения кривой, но некоторые из них работают механически и должны быть откорректированы оператором. Для больших объемов данных результаты часто зависят от мастерства оператора и от его опыта задания правильного числа мод для учитываемой модели.



Локальные и глобальные средства подбора кривых

Средства подбора кривых можно классифицировать как локальные и глобальные. Эта классификация зависит от того, как проводится оценка модальных параметров по набору результатов измерений частотных характеристик.

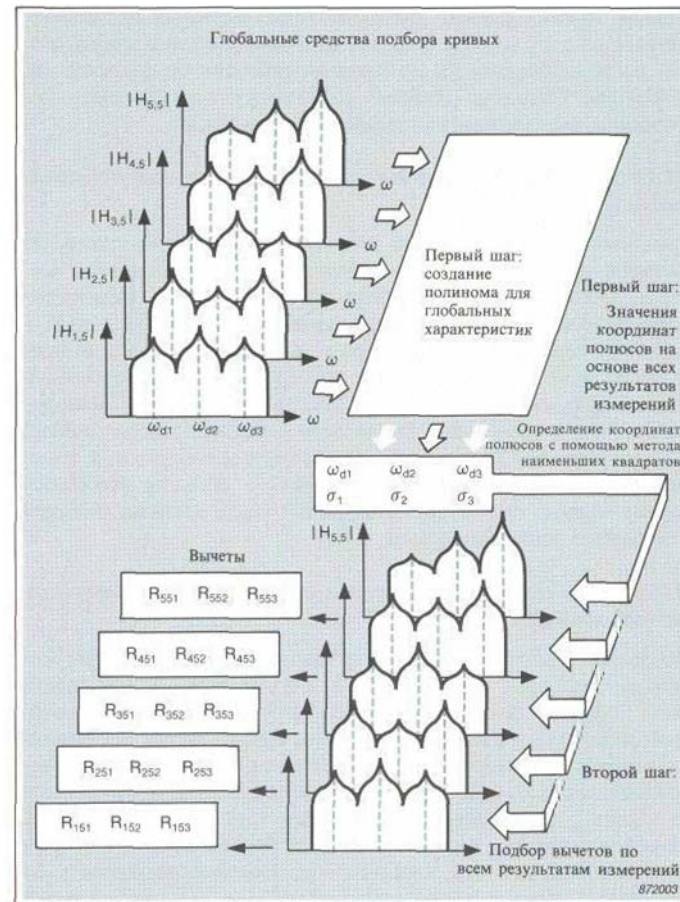
• Локальные средства подбора кривых

В эту категорию попадают большинство средств подбора кривых. Они подбирают координаты полюсов по одному или нескольким измерениям и задают их для всего массива данных. После этого подбираются вычеты для каждого отдельного результата измерения частотных характеристик с использованием локально определенной координаты полюса.

Достоверность результатов, полученных с помощью локальных средств подбора кривых, зависит от предположения, что локально определенные координаты полюсов справедливы для всего массива данных. Это предположение может быть не всегда справедливым. Некоторые из результатов измерений частотных характеристик может быть трудно подогнать, так как они содержат сильные локальные моды. Глобальные средства подбора кривых используют другой метод оценки.

• Глобальные средства подбора кривых

Глобальные средства подбора кривых проводят оценку глобальной координаты полюса методом наименьших квадратов по всем результатам измерений, т.е. по всему массиву данных. При использовании этого метода происходит усиление глобальных мод и ослабление чисто локальных мод, которые могут быть связаны с некоторыми частотными характеристиками. После этого средство подбора кривых использует глобальную координату полюса для подбора вычетов для каждого отдельного результата измерений.



Модальные испытания, проводимые с помощью ЭВМ

Во многих случаях применения анализа мод колебаний возникает необходимость в определении большого числа степеней свободы и проведении такого же числа измерений частотных характеристик. Поэтому для проведения оценки и регистрации большое значение имеет использование ЭВМ. В настоящее время для этой цели имеются небольшие, достаточно мощные настольные ЭВМ и универсальные, простые в использовании программы, которые в диалоговом режиме выдают оператору указания при проведении измерений и анализа.

- **Модальные испытания кузова микроавтобуса**

Давайте рассмотрим пример модальных испытаний, проводимых с помощью ЭВМ, и подробно изучим каждый этап таких испытаний.

- **Целью испытаний** является изучение первых двух упругих вертикальных мод колебаний кузова микроавтобуса для проверки аналитических расчетов и для предсказания реакции (механических колебаний) вследствие воздействия некоторых предполагаемых сил возбуждения.

- **Испытательным оборудованием** является система для анализа мод колебаний фирмы Брюль и Кьер с соответствующим программным обеспечением для ЭВМ.

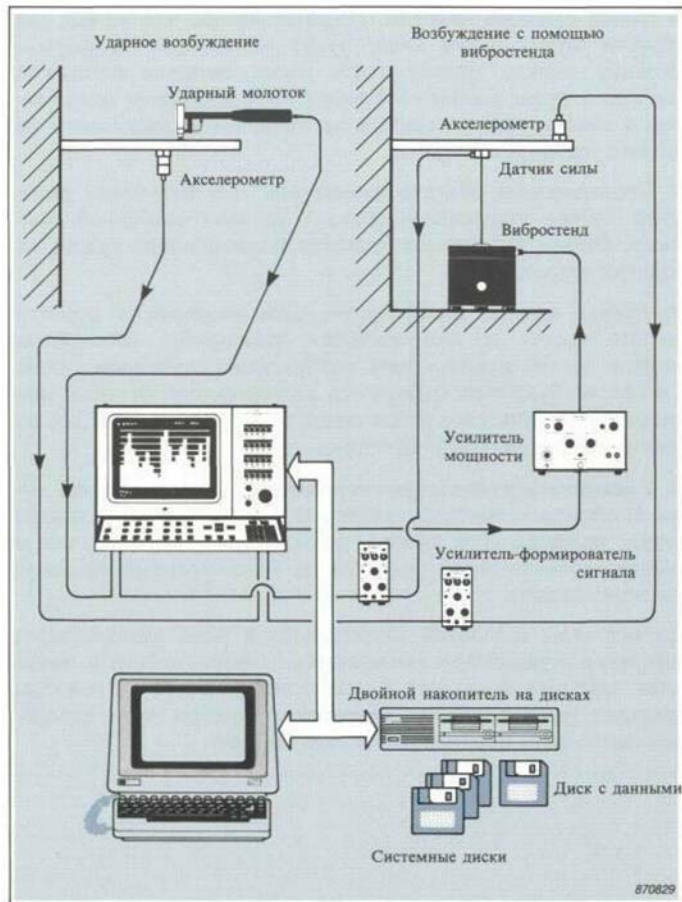
- **Порядок проведения испытаний** может быть разделен на четыре этапа:

- Этап 1 — подготовка модальных испытаний.

- Этап 2 — проведение измерений.

- Этап 3 — оценка параметров путем подбора кривых.

- Этап 4 — выпуск документации по испытаниям и их результатам.



Этап 1 - подготовка модальных испытаний

- **Выбор степеней свободы.** Предполагается, что первые две упругие вертикальные моды будут иметь простые формы. Поэтому можно ограничиться восемнадцатью степенями свободы с проведением измерений в вертикальном направлении в точках, расположенных на одинаковом расстоянии на нижней части рамы кузова.
- **Подвешивание объекта испытаний.** Для излучения динамики кузова попытаемся создать условия свободной подвески. Одним из методов является подвешивание кузова на упругих канатах.
- **Выбор метода возбуждения.** Для перекрытия области низких частот и линеаризации каких-либо нелинейных свойств можно использовать возбуждение случайной силой. Сигнал возбуждения отбирается от генератора сигнала анализатора, усиливается усилителем мощности и подается на электродинамический вибростенд.
- **Расположение/подсоединение вибростенда и датчика силы.** Наилучшим местом соединения с вибростендом в нашем случае является угол кузова, где как симметричные, так и несимметричные моды будут иметь максимальные амплитуды перемещения.

Датчик силы шпилькой закрепляется в раме кузова (через отверстие с резьбой) и соединяется с вибростендом с помощью нейлоновой штанги (толкателя) диаметром 4 мм. Вибростенд устанавливается непосредственно на полу, способном поглощать противодействующую силу.

• **Крепление акселерометра.** Так как испытуемый объект обладает большой массой и имеет гладкие поверхности, используемый для восприятия реакции (ускорения механических колебаний) в области низких частот акселерометр целесообразно закрепить при помощи крепежного магнита. Такой метод крепления обеспечивает простоту перемещения акселерометра между соответствующими выбранным степеням свободы точками замера.

• **Формирование сигнала и калибровка.** Усиление и формирование отдаваемых датчиком силы и акселерометром сигналов проводится с помощью усилителей заряда, которые настраиваются на калиброванные значения чувствительности используемых датчиков. Этим обеспечивается подача на анализатор откалиброванных сигналов. После этого проводится проверка и калибровка всей системы.

• **Настройка анализатора.** В данном случае оптимальными являются следующие режимы и параметры:

Режим измерения и анализа: режим анализа в двух каналах с усреднением спектров.

Запуск: режим несинхронизированного запуска с заблокированным пусковым устройством (анализатор вводит и обрабатывает данные с максимальной скоростью).

Усреднение: усреднение по линейному закону с максимальным числом циклов усреднения (процесс усреднения можно остановить, когда кривые становятся достаточно плавными).

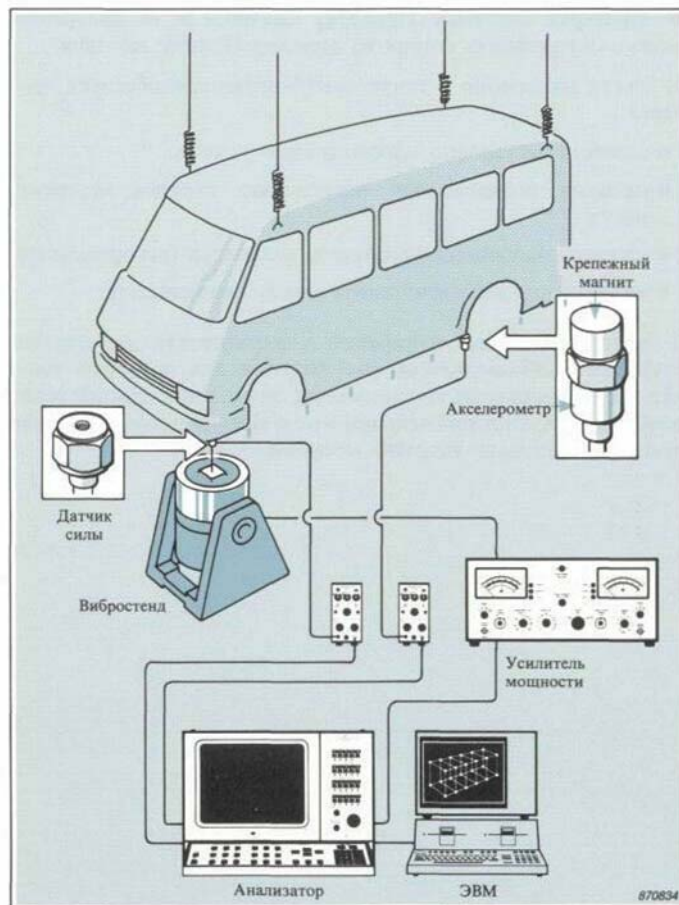
Частотный диапазон: верхний предел 100 Гц.

Средняя частота: основная полоса (нижний предел учитываемого частотного диапазона равен 0 Гц).

Взвешивание: весовая функция Ханнинга (оптимальная весовая функция для случайного возбуждения).

Канал А и канал Б: входные аттенюаторы, фильтры и опорные значения настраиваются с учетом технических единиц.

Генератор: режим отдачи случайного сигнала.



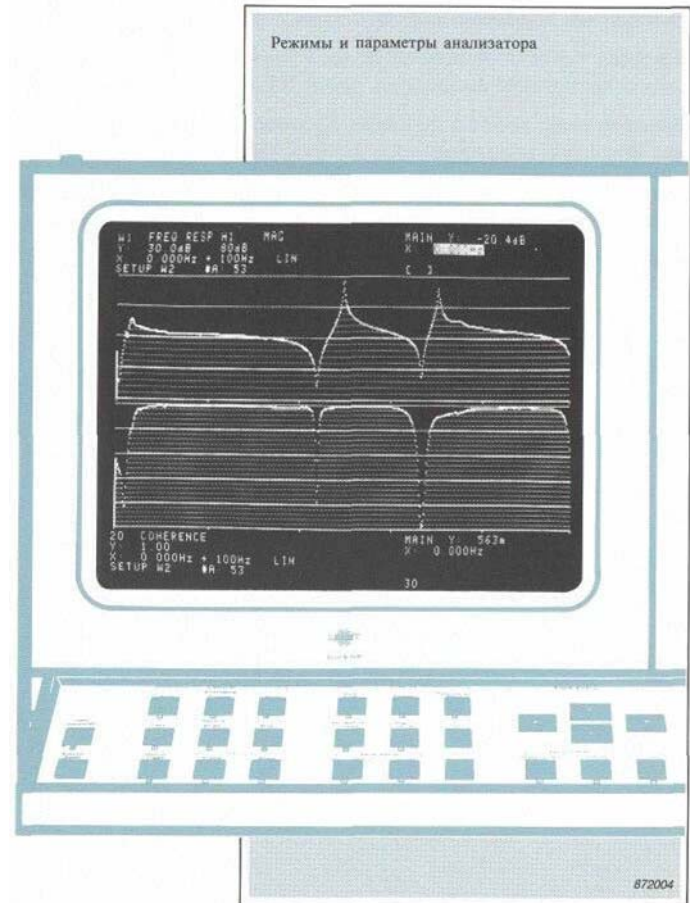
870834

• **Проверка системы.** Проверку системы и ее настройки можно осуществить одним из описанных ниже методов.

1. Метод измерения в точке возбуждения способствует проверке

- наличия достаточно плоского спектра силы
- наличия поддающейся объяснению степени когерентности
- наличия положительных пиков квадратур (ускоряемость)
- присутствия антирезонансов между резонансами.

2. Метод нескольких измерений в соответствующих *другим степеням свободы* точках возбуждения для проверки того, что все необходимые моды присутствуют в выбранной точке возбуждения. При применении этого метода проверки лучше всего использовать ударный молоток.



Этап 2 - проведение измерений

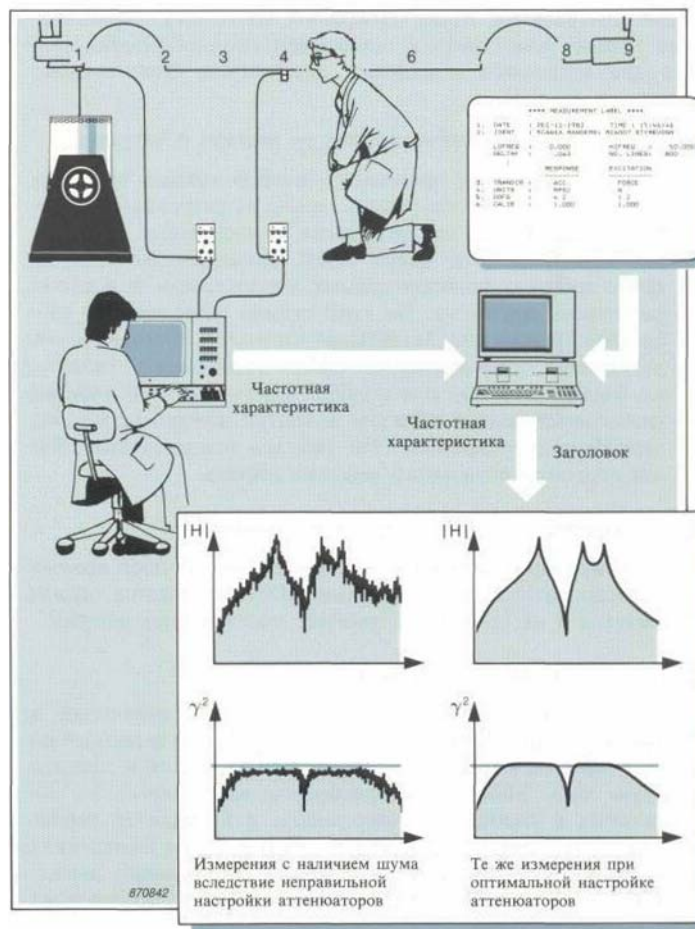
На данном этапе проводятся измерения и хранятся частотные характеристики между точками, соответствующими степени свободы возбуждения и другим определенным степеням свободы.

ЭВМ оказывает помощь при обработке данных. Она управляет выводом данных из анализатора и сообщает, когда каждая передача заканчивается и можно устанавливать датчик на другое место. ЭВМ также создает файлы данных и помещает данные на хранение в запоминающее устройство на гибком диске. В заголовках файлов предусмотрена информация о степенях свободы, для которых проведены замеры, режимах и параметрах анализатора, калибровке, дате и времени и любые примечания к помещенным на хранение результатам.

Оператор играет важную роль, непрерывно контролируя получаемые результаты. Путем наблюдения по экрану анализатора за функцией когерентности и за сходимостью частотных характеристик оператор может принять решение по вопросу, когда принимать получаемые результаты, а когда осуществить нужную корректировку.

Программа может управлять автоматическим происхождением описанного процесса. Однако, автоматическое управление использовать не рекомендуется.

- Этап измерений и сбора данных играет самую важную роль для всех испытаний. Окончательные результаты зависят в первую очередь от точности, достигаемой на этом этапе.



Этап 3 - оценка параметров путем подбора кривых

После завершения этапа измерений частотных характеристик можно приступить к предварительной обработке данных для выделения модальных параметров. Этот процесс имеет три стадии:

1) Интерактивный подбор кривых => частота и затухание

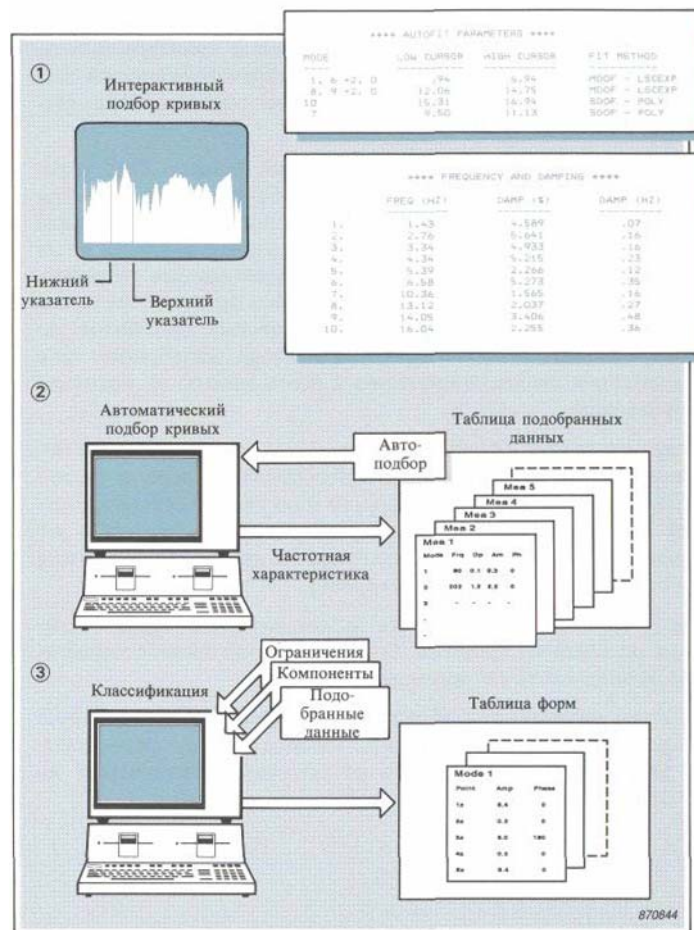
На данной стадии проводится подбор кривых вручную. Оператор должен сам решать, какие из результатов измерений частотных характеристик лучше всего подходят для использования, какие моды представляют интерес, какое средство подбора кривых использовать и в каком частотном диапазоне. На этой стадии определяются глобальные параметры (*модальные частоты и коэффициенты затухания*). Одновременно ЭВМ «выписывает рецепт», т.е. выдает *таблицу для подбора кривых*. В этой таблице указывается, каким образом оператор должен проводить первый подбор кривых. Эта таблица используется ЭВМ для подгонки остального массива данных.

2) Автоматический подбор кривых => вычеты

ЭВМ проводит в автоматическом режиме подбор кривых по всем результатам измерений. Осуществляется оценка *вычетов* и их хранение в таблице *подобранных данных*.

3) Классификация => формы мод

В процессе классификации информация, собранная в таблице *подобранных данных*, преобразуется в данные по формам мод (масштабированным) и хранится в таблице *форм мод*. ЭВМ также преобразовывает данные из локальных в глобальные координаты и определяет движения точек, соответствующих неучтенным при измерениях степеням свободы, в виде линейных комбинаций движений точек, соответствующих учтенным при измерениях степеням свободы.



Этап 4 - выпуск документации по испытаниям и их результатам

Документация может быть выполнена в виде выпечатанных таблиц с результатами. Но для больших массивов наиболее рациональным является графическое представление.

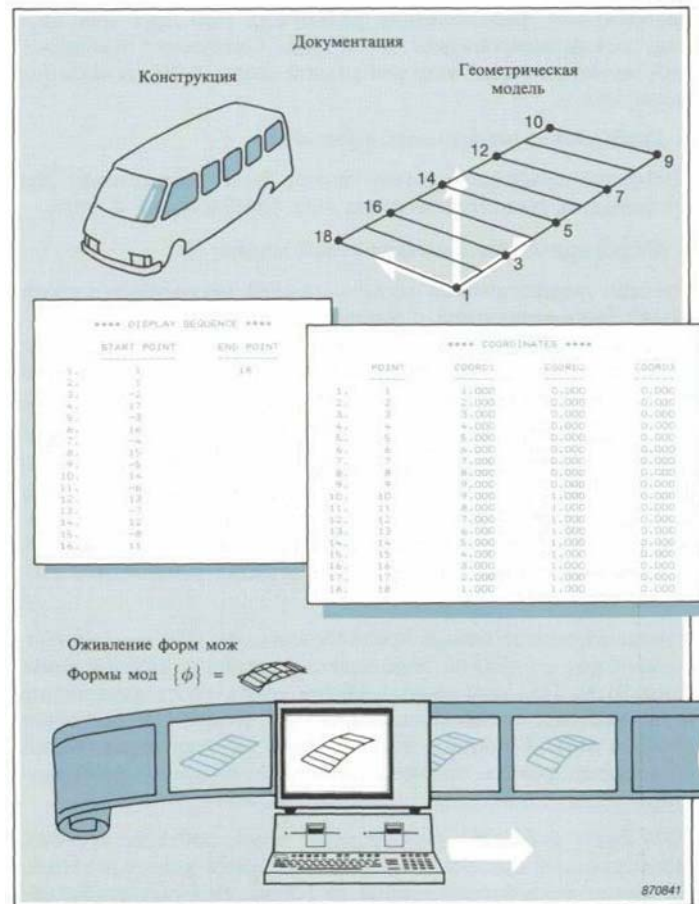
• Построение геометрической модели

При построении модальной модели никакая геометрическая информация (за исключением соответствующих заданным степеням свободы точек и направлений) не включается в динамическое описание. Для выпуска документации необходимо получить некоторые геометрические параметры, чтобы на изображениях был представлен объект испытаний.

В данных испытаниях измерялись только частотные характеристики в вертикальном направлении в точках в одной плоскости, т.е. в точках рамы кузова. Эта относительно простая геометрическая конструкция может быть описана в системе прямоугольных координат с помощью таблицы *координат*. Для получения изображения проводится задание вычерчиваемых линий между координатами. В этом процессе используется обновляемая таблица *последовательности изображения*.

• Оживление изображения

Формы мод могут быть определены как выбранный набор относительных перемещений по всей конструкции, представленный с помощью вектора форм мод. Принцип оживления может быть проиллюстрирован в виде мультипликационного фильма, содержащего рисунки форм мод в масштабе, изменяющемся по гармоническому закону. Эти формы мод непрерывно изображаются на экране ЭВМ. Могут использоваться дополнительные режимы изображения: вращение вокруг трех осей, расширение диапазона и панорамное изображение, изменение амплитуды и скорости движущихся



изображений, расположение различных мод друг над другом, недеформированная геометрия. Оживление изображений является очень информативной формой представления форм мод.

- **Графическая регистрация форм мод**

Цифровой графопостроитель может быть использован для графической регистрации форм мод колебаний на бумаге.

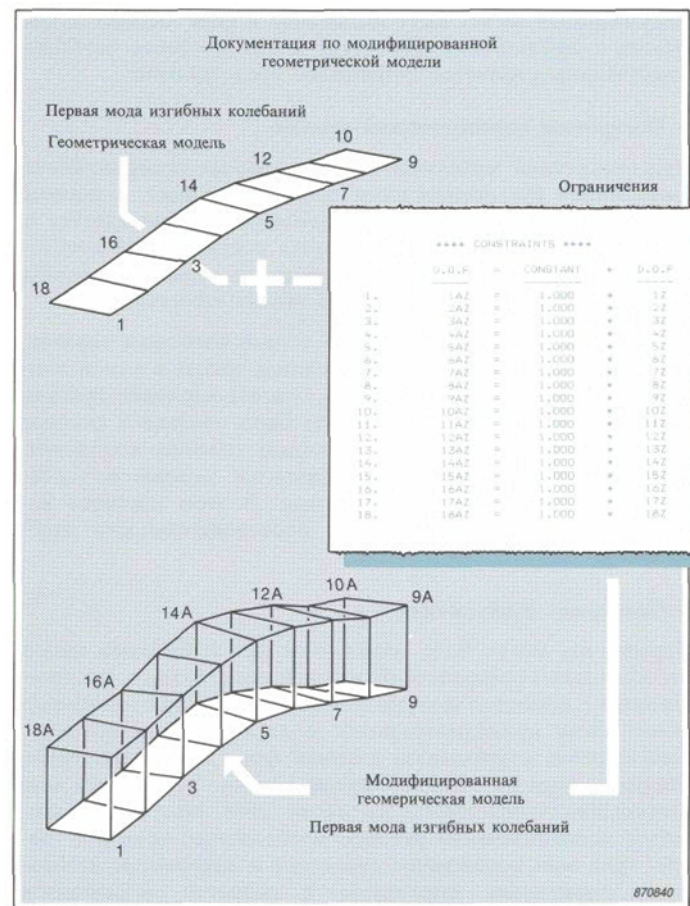
- **Модифицирование геометрической модели**

Простая геометрическая модель нижней части рамы кузова может быть расширена с включением координат крыши микроавтобуса. Результирующее изображение будет представлять коробчатую конструкцию, которая более правильно представляет кузов микроавтобуса.

Программное обеспечение имеет подпрограмму для включения точек, соответствующих незамеряемым степеням свободы, в таблицу *ограничений*. Ограничения выражаются в том, что перемещения соответствующих незамеряемым степеням свободы точек должны быть произведениями константы и перемещений точек, соответствующих замеряемым степеням свободы.

В нашем примере можно предположить, что для двух учитываемых мод колебаний перемещения крыши и нижней рамы одинаковы. Поэтому можно ввести точки, соответствующие незамеряемым степеням свободы (от точки 1 A до точки 18 A), с равной единице константой в таблицу ограничений и модифицировать таблицу *последовательности изображений*.

ЭВМ будет добавлять перемещения точек, соответствующих незамеряемым степеням свободы, во время классификации. На основе модифицированной информации будет строиться изображение новой геометрической модели.



Динамическая модальная модель

- Окончательные результаты модальных испытаний

Непосредственным результатом модальных испытаний являются представленные в виде изображений формы мод и связанные с ними резонансы. Но кроме того, мы располагаем инструментом, с помощью которого можно получить полную динамическую математическую модель объекта испытаний.

- Что такое динамическая модель?

Динамическая модель представляет собой математическую формулировку динамических свойств конструкции в виде дискретного набора *точек и направлений*. Она *не является моделью физической конструкции*. Например, если конструкция имела только один вход и один выход, динамическая модель может иметь вид:

$$X(\omega) = H(\omega) \cdot F(\omega)$$

где параметром модел является частотная характеристика $H(\omega)$.

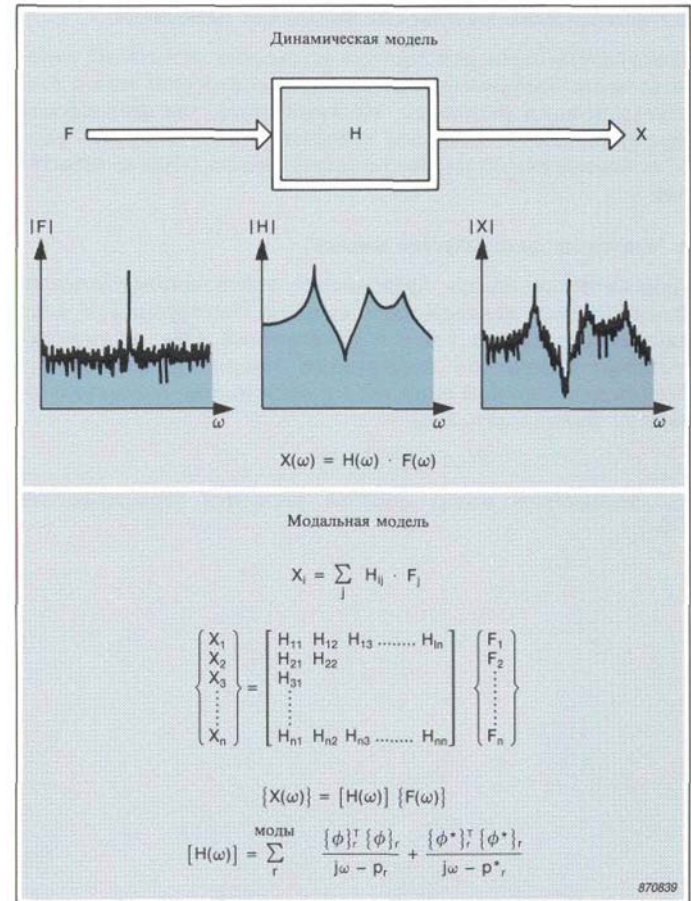
- Что такое модальная модель?

Модальная модель является обобщением динамической модели:

$$\{X\} = [H] \cdot \{F\}$$

где вектор $\{X\}$ представляет собой таблицу спектров механических колебаний в точках, соответствующих заданным степеням свободы, $\{F\}$ является таблицей спектров сил возбуждения для тех же самых точек и $[H]$ - матрица частотных характеристик, соответствующих всем возможным комбинациям выходов и входов. Эта модель называется модальной, так как матрица $[H]$ может быть создана по определенным путем оценки модальным параметрам.

Преимущество данной формулировки заключается в том, что *параметры могут быть определены экспериментальным путем*. Хотя на основе измерений частотных характеристик определен только один ряд или одна колонка матрицы $[H]$, можно рассчитать все остальные элементы благодаря тому, что известны соответствующие формы мод, модальные частоты и значения затухания.



Проверка и применение модели

Благодаря простоте процесса сравнения форм и частот мод колебаний может быть легко проведена качественная проверка аналитического решения по оцененным модальным параметрам. Однако, количественный потенциал модели оценить труднее.

• Адекватность модели

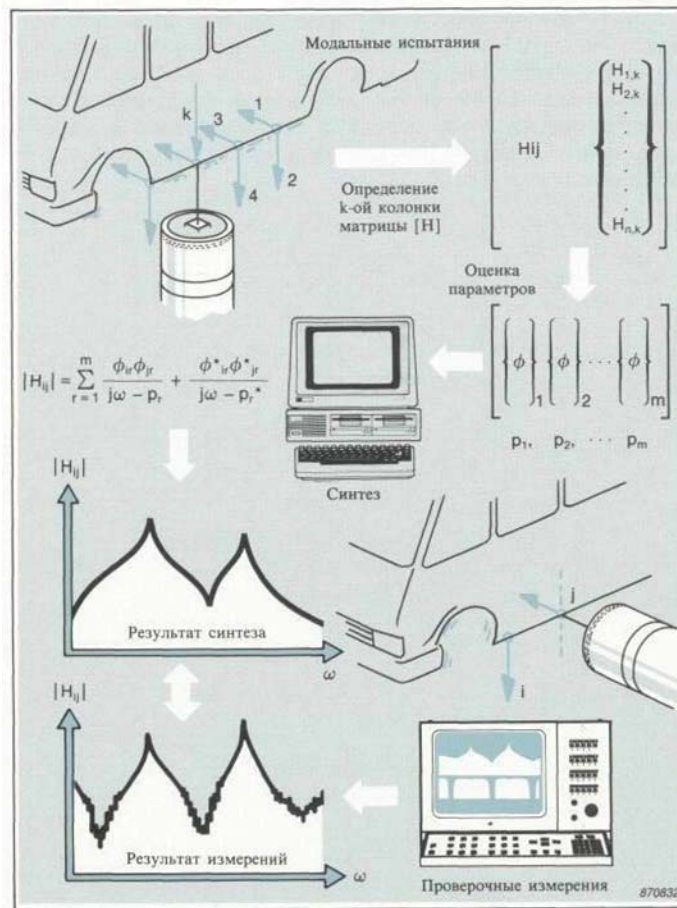
Модальная модель, которая может быть полезна в количественном смысле, должна быть достаточно точной и полностью представлять соответствующую конструкцию.

• Проверка точности путем синтеза частотных характеристик

Если модальные испытания и проверки калибровки выполнены правильно, то модальные данные будут представлять собой точное описание динамических свойств исследуемой конструкции. Для проверки точности может быть использована простая процедура.

Во время испытаний мы провели измерения или одной полной строки (ударные испытания) или одной полной колонки (присоединяемый вибростенд) матрицы частотных характеристик. По этим результатам измерений ЭВМ с соответствующей программой может провести синтез незамеренных частотных характеристик. Если после этого провести измерения соответствующих частотных характеристик исследуемого объекта и сравнить результаты этих измерений с результатами синтеза, можно определить, насколько точна и адекватна модальная модель.

Точность может оцениваться вблизи модальных частот, где пики должны точно совпадать. Вопрос об адекватности должен решать оператор на основе того, насколько хорошо соответствующие функции совпадают между модами и в отношении последующего применения модели.



Замечания о законченности модели

С теоретической точки зрения формулировка модальной модели точна, так как не было введено никаких аппроксимаций. Но остается открытым вопрос о том, насколько точна модель, созданная на основе результатов измерений и оценок. Предполагая, что исходные предположения о линейности и т.п. справедливы, остается проблема, связанная с *усечением*.

- **Усечение мод**

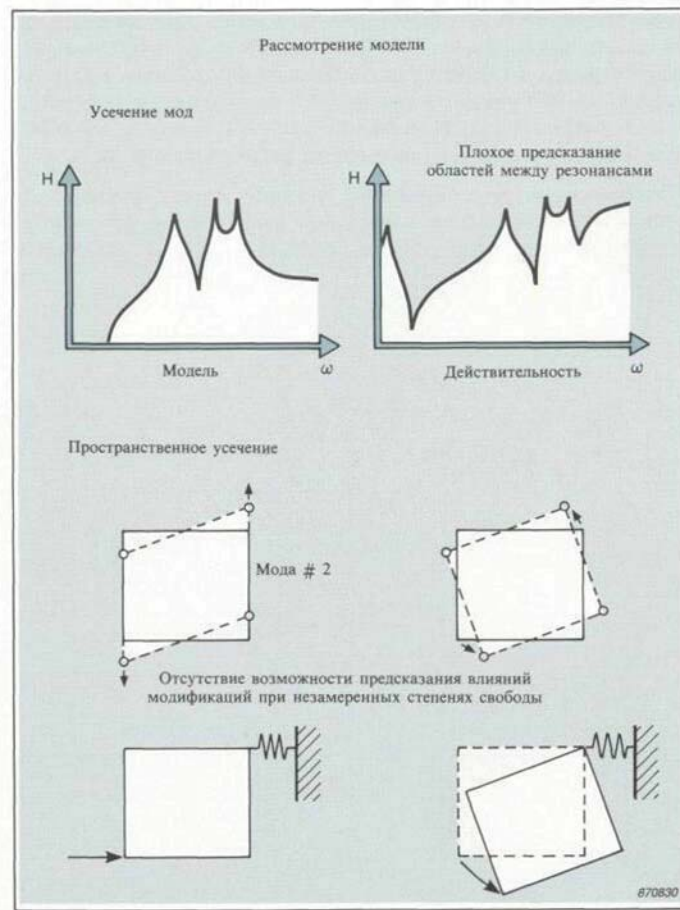
Так как всегда необходимо ограничить частотный диапазон при испытаниях, в поле зрения попадают не все моды конструкции. На практике часто игнорируют моды твердого тела при очень низких частотах, а также моды, имеющиеся только в некоторых частях конструкции. Для получения максимального разрешения по частоте всегда целесообразно сохранять как можно узкий диапазон частот. Это означает, что в частотной области происходит усечение, которое может привести к снижению точности модели, особенно между резонансами.

• Пространственное усечение

При описании непрерывной конструкции мы имеем дело с конечным дискретным набором степеней свободы. Но каждая точка конструкции может теоретически перемещаться в шести направлениях. Непроведение измерений в некоторых из этих направлений и конечное число используемых точек замера равносильны пространственному усечению.

Давайте снова рассмотрим наши модальные испытания. Кузов микроавтобуса был описан на основе результатов конечного числа измерений в вертикальном направлении. На основе полученных результатов можно видеть, что вторая мода твердого тела (кручение) более похожа на срез, так как не была получена информация о горизонтальных перемещениях.

Модель не может быть использована для предсказания влияния сил или модификаций в точках/направлениях, где не было проведено измерений.



Что такое имитационное моделирование с помощью ЭВМ?

Имитационное моделирование с помощью ЭВМ представляет собой применение точной и полной модальной модели. Моделирование может оказать помощь при поиске ответа на вопрос «А что если?» в отношении оптимизации прототипной конструкции, при решении проблем и изучении поведения конструкции при оцененных рабочих условиях.

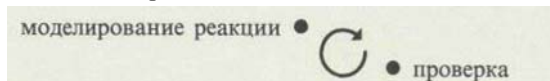
Имитационное моделирование реакций может предсказать реакции (механические колебания) конструкции при возбуждении различными силами, действующими в различных точках.

Моделирование модификаций может использоваться для предсказания в терминах модальных параметров того, что произойдет с моделью, если будут введены физические модификации (изменения массы, жесткости и затухания, изменения узлов и т.п.).

Проверка. Предсказанная реакция может быть преобразована в шум, деформацию, усталость и т.п. для проведения сравнения с опорными данными, критериями проектирования или стандартами. Если результаты неудовлетворительны, то технический специалист должен определить необходимые меры.

Имитационное моделирование в цикле проектирования

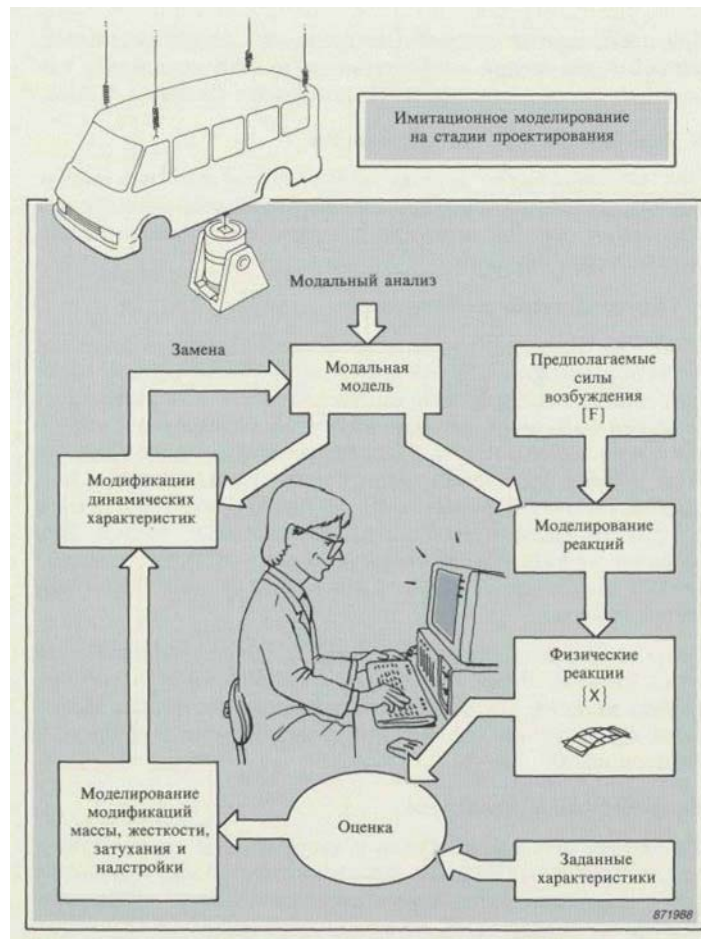
Циклический процесс



моделирование модификации •

может быть повторен при необходимости много раз.

Благодаря высокой скорости ЭВМ и эффективности используемого программного обеспечения время, необходимое для выполнения полного цикла имитационного моделирования, составляет всего несколько минут. Следовательно, оптимизация может быть проведена в течение очень короткого времени.



Имитационное моделирование реакций

Для предсказания реакций (механических колебаний) исследуемой конструкции необходимо нагрузить модель заданным комплектом моделируемых физических сил.

• Возбуждение при моделировании

При моделировании можно использовать два типа возбуждения, т.е. синусоидальное или широкополосное возбуждение. Таким образом, имеются два различных вида имитационного моделирования.

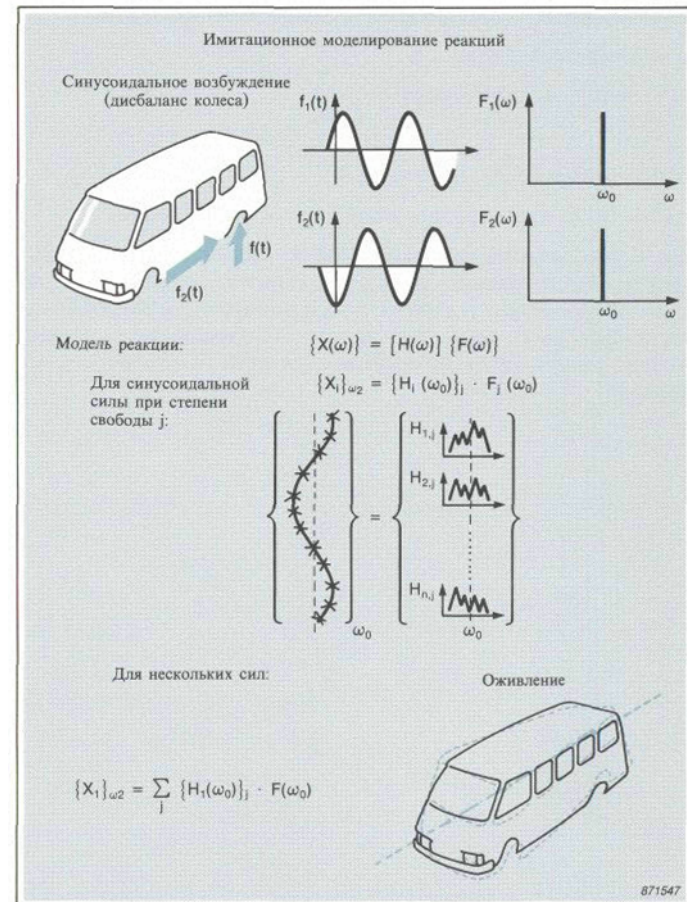
• Синусоидальное возбуждение

Синусоидальное возбуждение является реальным для многих случаев применения. В рабочих условиях конструкции часто подвергаются воздействию синусоидального возбуждения от действия свободных сил или моментов, создаваемых вращающимися компонентами. Процедура моделирования проста. Нам необходим набор физических перемещений $\{x\}$ (форма рабочих перемещений), вызванных возбуждением в соответствующей одной степени свободы точки. При наличии только одной частоты спектр реакции содержит только одну составляющую - одно значение для одной степени свободы.

Если необходимо использовать более одной возбуждающей силы, реакция будет представлять собой сумму индивидуальных реакций. Дисбаланс при вращении, например, может быть моделирован как две ортогональные силы, сдвинутые по фазе на 90° .

Синусоидальное оживление

Оживление достигается путем расчета вектора деформаций с использованием такой же методики, что и для оживления форм мод. Если учитывается несколько частот, правильное оживление невозможно, но может быть показано движение, представляющее огибающую механических колебаний.

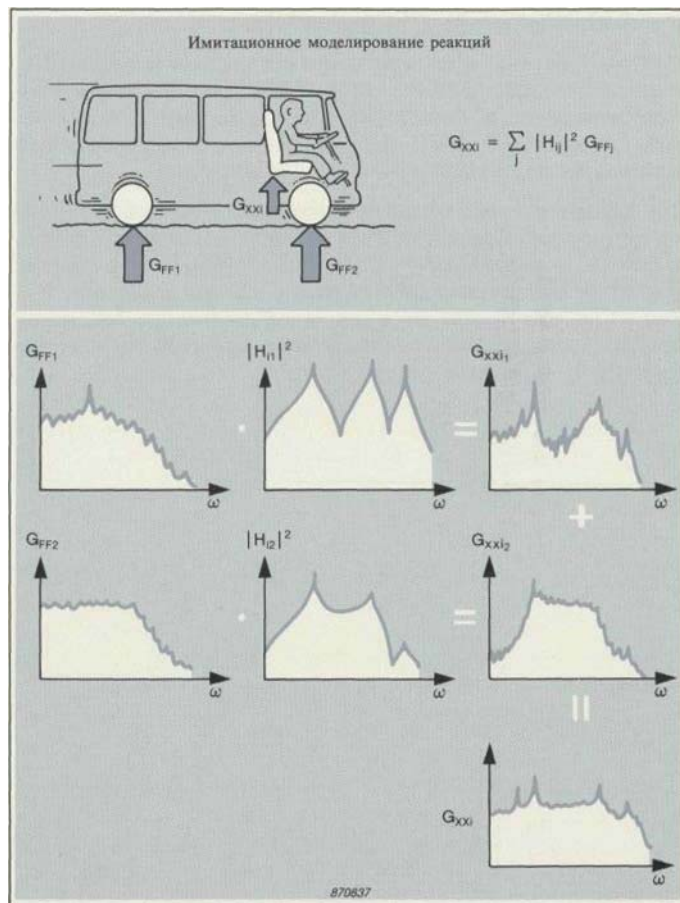


• Широкополосное возбуждение

Широкополосное имитационное моделирование используется в случае действия случайных сил. Такое моделирование может быть необходимо, например, для предсказания уровня комфорта в кабине водителя автомобиля на определенной (стандартной) поверхности или для предсказания составляющих усталости в нестабильных окружающих условиях.

Собственный спектр силы возбуждения G_{FF} может быть получен из расчета, стандартов или по результатам измерений. Затем с помощью программного обеспечения может быть проведен синтез частотных характеристик между точкой приложения силы и точками, соответствующими другим степеням свободы модальной модели.

При данном типе возбуждения мы имеем дело со статистическими параметрами (а не с дискретными величинами). Следовательно, результаты должны быть оценены с использованием статистических методов.



Моделирование модификаций

• Решение проблемы «Что произойдет, если ... ?»

Многие проблемы с шумом и механическими колебаниями, с которыми приходится сталкиваться, связаны с резонансами конструкции. Резонансы могут приводить к механическому усилению нормальных рабочих сил, в результате чего получаются недопустимые реакции конструкции.

В подобных случаях в задачу технического специалиста входит предложение решения. Такое решение часто может заключаться в модификации конструкции (изменении массы, жесткости и/или затухания) с целью сдвига резонанса. Одним из путей решения является метод проб и ошибок, но он является дорогостоящим в отношении времени, расхода материалов и качества.

Если имеется модальная модель, то модификации могут быть оценены с помощью ЭВМ. Такой подход «Что произойдет, если ... ?» может быть применен задолго до проведения модификаций физической конструкции и окончательных испытаний.

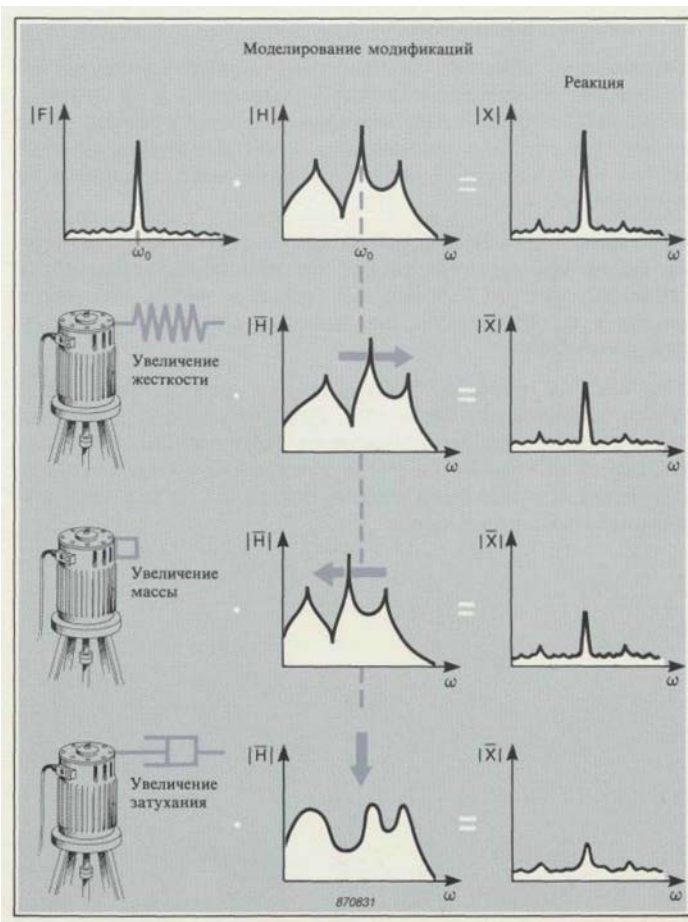
• **Рабочие модификации: «Что происходит, когда...?»**

Подобная же проблема возникает, когда работа или эксплуатация конструкции оказывает влияние на ее динамические свойства.

«Что» происходит, «когда» конструкция

- воспринимает нагрузку (изменение массы)?
- вступает в контакт с грунтом (изменение жесткости)?
- вступает в контакт с другой конструкцией (надстройкой)?

Используя модальную модель, можно предсказать влияние этих ситуаций с помощью ЭВМ. В процессе предсказания модифицированных динамических свойств создается новая модальная модель - единственный инструмент, необходимый для предсказания новых реакций (механических колебаний) исследуемой конструкции.



Внесение модификаций

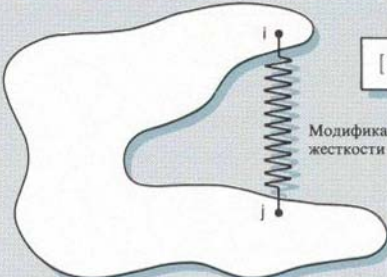
• Расчет модификаций

Обычно нам известны не пространственные параметры исследуемой конструкции, а лишь параметры в модальных координатах. Физическая модификация, описываемая место в пространственных параметрах, будет расширять влияние на все модальные координаты во всем объеме модального преобразования.

Уравнение для модифицированной конструкции представляет собой стандартную задачу на отыскание собственных значений, решение которой дает новые значения модальных частот и коэффициентов затухания, а также новые формы мод колебаний.

Так как все расчеты базируются на модальной модели, модификации могут быть моделированы в точках замера и с учетом определенных направлений. Метод является точным, так как не используются аппроксимации. Его точность зависит целиком от качества модели, созданной на основе экспериментальных результатов.

Физические модификации в модальных координатах



Модификация жесткости

$$[\Delta \bar{k}] = [\phi]^T [\Delta k] [\phi]$$

Решение: характеристическое уравнение

$$[I]s^2 + [2\sigma]s + [\phi]^T [\Delta k] [\phi] + [\omega_0^2] \{q(s)\} = 0$$

дает: $p_1, p_2, \dots, p_m$ = новые координаты полюсов
и $\{\phi\}_1, \{\phi\}_2, \dots, \{\phi\}_m$ = новые формы мод

870843

Проведение модификаций

• **Составляющими блоками** программы модификаций являются:

- точечные массы
- линейные пружины без массы
- вязкостные демпферы.

Кроме того, могут иметься некоторые составные элементы:

- настроенные абсорберы
- балочные элементы (ребра жесткости)
- надстройки.

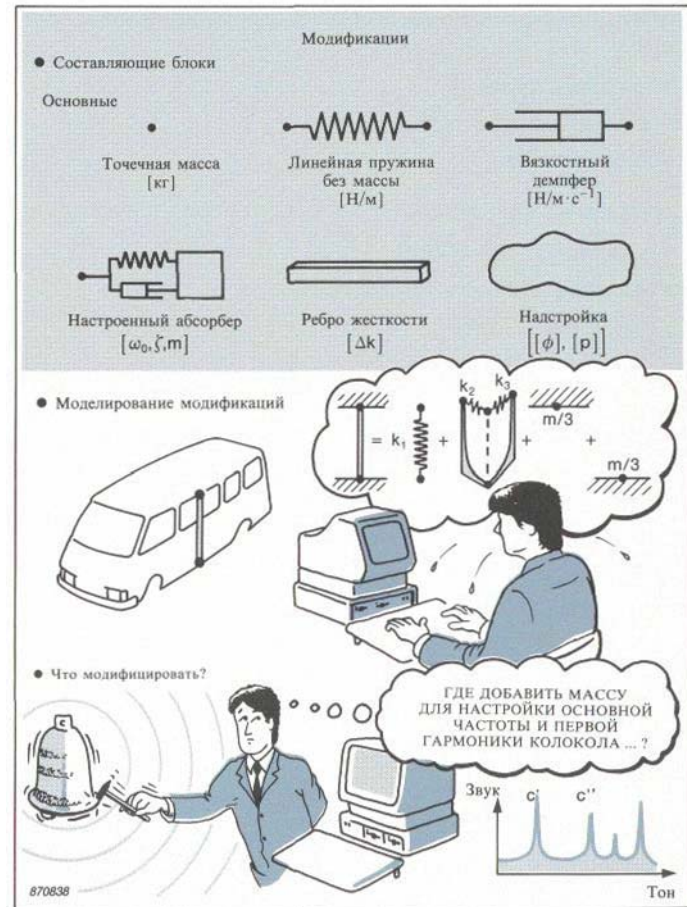
• **Программное обеспечение**

Комплект программ для модификаций конструкций предоставляет в распоряжение пользователя универсальный инструмент, который может быть использован многими способами. Непосредственное применение было уже обсуждено, но имеется также возможность работать с другого направления. Можно ввести набор требуемых модальных частот и с помощью ЭВМ провести расчет необходимых модификаций.

- Моделирование физических модификаций

Практические модификации не могут быть моделированы в виде точечных масс или пружин, не обладающих массой, а они должны быть представлены в виде комбинаций этих основных элементов.

Стержень, приваренный между двумя точками конструкции, может быть при моделировании представлен с помощью одного элемента жесткости в направлении продольной оси. Если имеются поперечные перемещения, то два других элемента жесткости, перпендикулярных друг другу в горизонтальной плоскости, приведут к улучшению модели. Так как реальные стержни обладают массой, модель может быть еще улучшена путем введения двух модификаций массы, придающих обеим точкам массу, равную $1/3$ физической массы стержня.



Пример применения синтезированных частотных характеристик

• Механические колебания судна

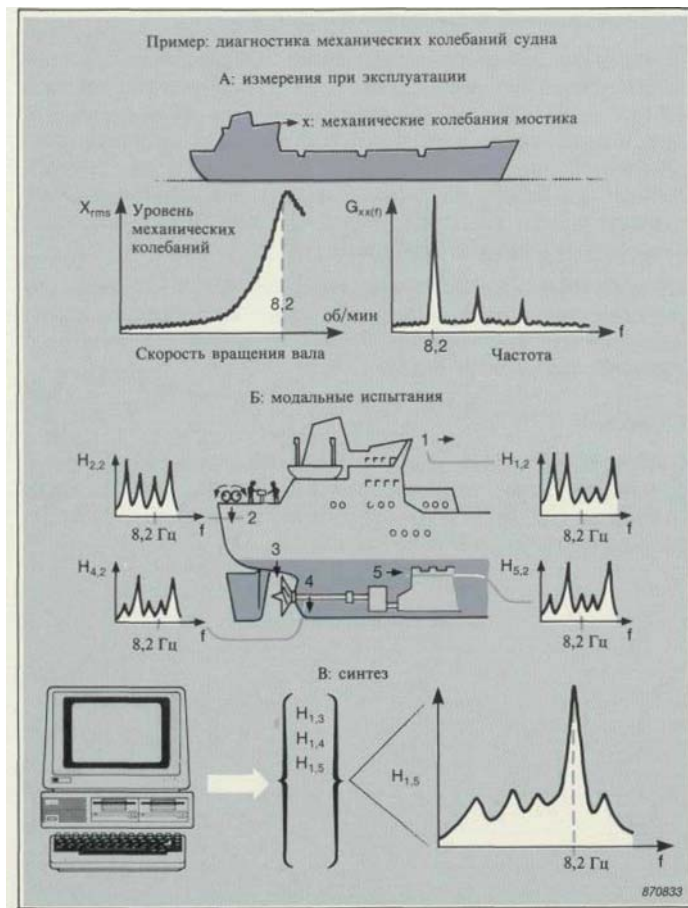
При нормальных рабочих условиях на мостике судна возникала серьезная проблема снятия показаний с приборов. Непосредственной причиной этого были слишком сильные механические колебания мостика.

Анализ сигнала механических колебаний показал, что амплитуда увеличивалась по экспоненциальному закону с ростом скорости. Спектр механических колебаний указывал на концентрацию энергии при определенной частоте вращения гребного винта. Таким образом было обнаружено, что гребной винт был первичным источником механических колебаний.

Задача заключалась в определении точки, в которой эта энергия передавалась конструкции судна. Возможными местами передачи энергии были: кормовой (задний) подшипник (две степени свободы), редуктор (две степени свободы) или колебания давления, передаваемые корпусу в непосредственной близости от гребного винта.

• Исследования

Было решено провести исследования на базе модальных испытаний с ограниченным числом степеней свободы. Возбуждение осуществлялось с помощью вибростенда с эксцентричными массами, приваренного к кормовой палубе. Вибростенд работал в режиме быстрой развертки частоты, обеспечивая относительно плоское распределение спектральной плотности энергии во время проведения измерений частотных характеристик.



- **Результаты исследований**

Ни одна из замеренных частотных характеристик не показала сильных резонансов при критической частоте (8,2 Гц), даже когда измерения проводились на мостике. Однако, возникающие в процессе работы силы не могли воздействовать на конструкцию на уровне верхней палубы. Поэтому на основе оцененных модальных параметров был проведен синтез частотных характеристик между мостиком и всеми возможными точками передачи энергии.

Источник был выявлен после того, как было найдено, что синтезированная частотная характеристика между опорным подшипником и мостиком указала на очень высокую подвижность при частоте 8,2 Гц.

- **Решение**

Изменение жесткости корпуса опорного подшипника привело к уменьшению подвижности в пять раз. Последующие измерения показали, что амплитуда механических колебаний уменьшилась почти во столько же раз.

Дополнительная литература

D. J. EWINS

"Modal Testing: Theory and Practice" *Research Studies Press Ltd., Letchworth, Herts, England.*

K. ZAVERI

"Modal Analysis of Large Structures - Multiple Exciter Systems" *Bruel&Kjaer* BT 0001-12

Материалы конференции IMAC

"Proceedings of the International Modal Analysis Conference"
Union College, Schenectady, N.Y. 12308

Журнал Общества экспериментальной механики SEM

"The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis" *The Society for Experimental Mechanics, Inc., School Street, Bethel, CT 06801*

Обозначения и пояснения

АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

Временная область

t	Время
τ	Временная задержка
$f(t)$	Сигнал силы
$x(t)$	Сигнал перемещения
$\dot{x}(t)$	Сигнал скорости
$\ddot{x}(t)$	Сигнал ускорения

Частотная область

f	$= \omega/2\pi$ Частота (Гц)
ω	$= 2\pi f$ Угловая скорость или угловая частота (рад/с)
$F(f)$	Спектр силы
$X(f)$	Спектр перемещения

АНАЛИЗ СИСТЕМ

Временная область

$h(\tau)$	Импульсная характеристика
-----------	---------------------------

Частотная область

$\gamma^2(\omega)$	Оценка функции когерентности
$H(\omega)$	Частотная характеристика
$H_1(\omega)$	Оценка частотной характеристики
$H_2(\omega)$	Оценка частотной характеристики

Общие обозначения

$\mathcal{F}$	Преобразование Фурье
$\mathcal{H}$	Преобразование Гильберта
$\mathcal{L}$	Преобразование Лапласа

ФИЗИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

m	Масса
k	Жесткость
c	Коэффициент затухания
c_c	Критический коэффициент затухания
ω	Угловая скорость

МОДАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

i	Степень свободы реакции
j	Степень свободы возбуждения
m	Число мод колебаний
r	Индекс моды с порядковым номером r
ω_{0r}	Незатухающая собственная частота для моды с порядковым номером r
ω_{dr}	Затухающая собственная частота для моды с порядковым номером r
ζ_r	Степень затухания моды с порядковым номером r
ϕ	Модальное перемещение
$\{\phi\}_r$	Масштабированный вектор формы моды с порядковым номером r
$\{\psi\}_r$	Немасштабированный вектор формы моды с порядковым номером r
$q_r(t)$	Модальная координата моды с порядковым номером r как функция времени
$Q_r(f)$	Модальная координата моды с порядковым номером r как функция частоты
$G_r(t)$	Обобщенная модальная сила во временной области

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\angle$	Геометрический или фазовый угол
Σ	Сумма
$()^*$	Комплексно сопряженная величина
j	Мнимое число
$(\hat{})$	Оценка
#	Номер
$\text{Im}[\]$	Мнимая часть
$\text{Re}[\]$	Действительная часть
$ \ $	Модуль
$\approx$	Приблизительно равно
$\propto$	Пропорционально
$*$	Свертка
—	Модифицированная функция или параметр
x, y, z	Координатные оси

$\Gamma_r(f)$	Обобщенная модальная сила в частотной области
σ_r	Скорость затухания моды с порядковым номером r
p_r	Координата полюса моды с порядковым номером r
a_r	Масштабный коэффициент моды с порядковым номером r
R_{ijr}	Вычет моды с порядковым номером r отн. степеней свободы i и j

МАТРИЧНЫЕ ЗНАКИ

$[m]$	Матрица масс
$[k]$	Матрица жесткостей
$[c]$	Матрица коэффициентов затухания
$[H]$	Матрица частотных характеристик
$[I]$	Единичная матрица
$[\Delta M]$	Матрица модифицированных масс
$[\Delta C]$	Матрица модифицированных коэффициентов затухания
$[\Delta K]$	Матрица модифицированных жесткостей
$[\Phi]$	Масштабированная модальная матрица модели системы
$[\]^T$	Транспонированная матрица

ЕДИНИЦЫ

Н	ньютон
м	метр
с	секунда
кг	килограмм
Па	паскаль

СОКРАЩЕНИЯ

СС	Степень свободы
ЧХ	Частотная характеристика

Мы надеемся, что в данной публикации Вы смогли найти ответы на многие вопросы и что эти брошюры будут служить Вам в качестве практического пособия. Если Вы имеете дополнительные вопросы, относящиеся к методам или аппаратуре для испытаний конструкций, просьба обратиться в одно из местных представительств фирмы Брюль и Кьер или написать непосредственно по адресу:

Брюль и Кьер
2850 Нэрум
Дания